

EDO Examen Ordinario 2025/26

Pablo Lobato de la Cruz

2025-12-18

Table of contents

| | |
|--|----|
| Ejercicio 1 | 2 |
| Enunciado | 2 |
| Resolucion | 2 |
| Resultado final | 6 |
| Ejercicio 2 | 7 |
| Enunciado | 7 |
| Resolucion | 7 |
| Resultado Final | 10 |
| Ejercicio 3 | 10 |
| Enunciado | 10 |
| Resolucion | 11 |
| Resultado final | 12 |
| Ejercicio 4 | 13 |
| Enunciado | 13 |
| Resolucion | 13 |
| Resultado final | 15 |
| Ejercicio 5 | 16 |
| Enunciado | 16 |
| Resolución | 16 |
| Resultado final | 18 |
| Ejercicio Extra | 18 |
| Enunciado | 18 |
| Resolución | 19 |
| Resultado final | 19 |
| Anexos: resolución de los sistemas lineales | 20 |
| A.1 Particular para el vector constante (equilibrio) | 20 |
| A.2 Particular para el término proporcional a t | 21 |

Ejercicio 1

Enunciado

[2 pt] **Ejercicio 1.** Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

y dadas las siguientes funciones:

$$\phi_1(x) = e^{-x/2} \sin x,$$

$$\phi_2(x) = e^{-x/2} (\sin x + \sin(2x)),$$

$$\phi_3(x) = e^{-x/2} \cos x,$$

$$\phi_4(x) = e^{-x/2} \sin(2x).$$

1. Determina cuáles funciones son autofunciones del problema. [0.5]
2. Para las autofunciones, calcular el autovalor correspondiente. [0.5]
3. Sea E el subespacio generado por las autofunciones que hayas identificado, define una base ortonormal respecto al producto escalar natural asociado a la formulación de Sturm-Liouville del problema. [0.5]
4. Calcula las siguientes integrales: [0.5]

1.

$$\int_0^\pi e^x \phi_1 \phi_4 dx$$

2.

$$\int_0^\pi (\phi_1' \phi_3 + \phi_3' \phi_1) dx$$

Resolucion

1.1 Autofunciones

Consideramos el problema de Sturm-Liouville:

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r + \lambda = 0.$$

Esto tiene como solución:

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

Como las autofunciones propuestas son senos y cosenos, los autovalores tienen que ser complejos así que nos limitaremos a los valores $\lambda > \frac{1}{4}$:

$$r = -\frac{1}{2} \pm i\beta, \quad \beta = \frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}$$

Entonces la solución general puede expresarse como

$$y(x) = e^{-x/2}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Imponiendo la primera condición de contorno:

$$0 = y(0) = e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) = C_1 \cos(0) \implies C_1 = 0$$

Imponiendo la segunda condición:

$$0 = y(\pi) = C_2 e^{-\pi/2} \sin(\beta\pi) \implies \beta = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, las autofunciones ($\lambda > \frac{1}{4}$) son

$$y_n(x) = e^{-x/2} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comparando con las funciones dadas:

- ✓ $\phi_1(x) = e^{-x/2} \sin x$ **sí** es autofunción (corresponde a $n = 1$).
- ✗ $\phi_2(x) = e^{-x/2}(\sin x + \sin(2x))$ **no** es autofunción (es combinación de autofunciones asociadas a autovalores distintos).
- ✗ $\phi_3(x) = e^{-x/2} \cos x$ **no** cumple $y(0) = 0$.
- ✓ $\phi_4(x) = e^{-x/2} \sin(2x)$ **sí** es autofunción (corresponde a $n = 2$).

1.2 Autovalores

De $\beta = n$ y $\beta = \frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}$ se tiene

$$\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} = n \quad \Rightarrow \quad 4\lambda - 1 = 4n^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = n^2 + \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particular:

- Para ϕ_1 ($n = 1$): $\lambda = 1^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.
- Para ϕ_4 ($n = 2$): $\lambda = 2^2 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$.

1.3 Normalizar

Para normalizar hay que encontrar la norma de ϕ_1 , ϕ_4 respecto al peso del problema.

Primero escribimos la ecuación en forma de Sturm–Liouville. Multiplicando

$$y'' + y' + \lambda y = 0$$

por el factor integrante $\mu(x) = e^x$ se obtiene

$$e^x y'' + e^x y' + \lambda e^x y = 0.$$

$$(e^x y')' + \lambda e^x y = 0,$$

que es la forma Sturm–Liouville con

$$p(x) = e^x, \quad r(x) = e^x, \quad q(x) = 0,$$

y condiciones de contorno homogéneas $y(0) = y(\pi) = 0$.

Por tanto, el **producto escalar natural** asociado es

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi w(x) f(x) g(x) dx = \int_0^\pi e^x f(x) g(x) dx.$$

Con este producto escalar calculamos la normas:

$$\|\phi_1\|^2 = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \int_0^\pi e^x \phi_1(x)^2 dx = \int_0^\pi e^x e^{-x} \sin^2 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Análogamente,

$$\|\phi_4\|^2 = \int_0^\pi e^x \phi_4(x)^2 dx = \int_0^\pi \sin^2(2x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Así, una **base ortonormal** de E es

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi_1(x), \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi_4(x).$$

1.4 Integrales

La primera integral es el producto escalar que hemos definido antes. Como las autofunciones son ortogonales, sabemos que es 0:

$$\int_0^\pi e^x \phi_1 \phi_4 dx = \langle \phi_1 \phi_4 \rangle = 0$$

La segunda la integral de la derivada de un producto evaluada en la frontera:

$$\int_0^\pi (\phi_1' \phi_3 + \phi_3' \phi_1) dx = \int_0^\pi \frac{d}{dx}(\phi_1 \phi_3) dx = [\phi_1 \phi_3]_0^\pi.$$

Como $\phi_1(0) = \phi_1(\pi) = 0$, se tiene $[\phi_1 \phi_3]_0^\pi = 0$, luego

$$\int_0^\pi (\phi_1' \phi_3 + \phi_3' \phi_1) dx = 0.$$

Intuiciones y formas alternativas

Ejercicio 1.1

Por la forma del problema se sabe que las soluciones van a ser combinación lineal de senos y cosenos con mismo argumento (parte imaginaria del autovalor), multiplicados por exponencial de la parte real.

Esto implica que la función que es combinación de senos con distinto argumento (ϕ_2) no puede ser autofunción. Además, las que quedan, solo se pueden descartar por las condiciones de frontera.

Evaluando las tres funciones es obvio que ϕ_3 no cumple con la condición en cero, mientras que ϕ_1 y ϕ_4 si son autofunciones.

Para garantizar que son solución de la EDO, hay que calcular el polinomio característico:

$$r^2 + r + \lambda = 0.$$

que como solución:

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$$

Por lo tanto las dos son autofunciones ya que la parte real es la misma y la imaginaria sabemos que cumple las condiciones de contorno.

Ejercicio 1.2

Derivar las soluciones y sustituir, parece un calculo largo, por eso parece más fácil encontrar la parte imaginaria del autovalor expresada en función de lambda. Para que el discriminante sea negativo

$$\beta = \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}$$

Invirtiendo se tiene:

$$\lambda(\beta) = \beta^2 + \frac{1}{4}$$

Ejercicio 1.3

Era necesario entender que el enunciado requiere encontrar la función de peso. Luego ya es solo calcular la norma siguiendo la definición.

Ejercicio 1.4

El objetivo del apartado no es un ejercicio de integrales si no entender el producto escalar y las propiedades de las soluciones del problema.

El primero es el producto escalar, el segundo pide evaluar en las condiciones de frontera.

Resultado final

1. **Autofunciones:** $\phi_1(x) = e^{-x/2} \sin x$ y $\phi_4(x) = e^{-x/2} \sin(2x)$.
2. **Autovalores:** si $y_n(x) = e^{-x/2} \sin(nx)$, entonces $\lambda_n = n^2 + \frac{1}{4}$. En particular,

$$\lambda(\phi_1) = \frac{5}{4}, \quad \lambda(\phi_4) = \frac{17}{4}.$$

3. **Base ortonormal de E** (con $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi e^x fg dx$):

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi_1(x), \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi_4(x).$$

4. **Integrales:**

$$\int_0^\pi e^x \phi_1 \phi_4 dx = 0, \quad \int_0^\pi (\phi_1' \phi_3 + \phi_3' \phi_1) dx = 0.$$

Ejercicio 2

Enunciado

[2 pt] **Ejercicio 2.** Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} y'(x) + ay(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{cases}$$

1. Expresar la solución como una convolución. [1]
2. Si $f(x) = 0$ para todo $x \geq 40$, demostrar que existe una constante c tal que la solución es ce^{-ax} para todo $x \geq 40$. Hallar el valor de c . [0.5]
3. ¿El conjunto de soluciones de este problema es un espacio vectorial? Justifica tu respuesta. [0.5]

Resolucion

2.1 Solución como convolución (Laplace)

Aplicamos transformada de Laplace (suponiendo f de orden exponencial):

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0), \quad \mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s), \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = F(s).$$

Transformando la ecuación $y'(x) + ay(x) = f(x)$:

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = F(s).$$

Como $y(0) = 0$, queda

$$(s + a)Y(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)}{s + a}.$$

El enunciado sugiere que la solución es una convolución, además reconocemos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-ax}$, luego por el teorema de convolución:

$$y(x) = (f * e^{-a\cdot})(x) = \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds.$$

2.2 Si $f(x) = 0$ para $x \geq 40$

Para $x \geq 40$ la integral anterior se reduce a

$$y(x) = \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds = e^{-ax} \int_0^x e^{as} f(s) ds = e^{-ax} \int_0^{40} e^{as} f(s) ds.$$

Por tanto existe una constante c tal que $y(x) = c e^{-ax}$ para todo $x \geq 40$, donde

$$c = \int_0^{40} e^{as} f(s) ds.$$

2.3 ¿Es un espacio vectorial?

No (en general). Para un f fijo, el conjunto de soluciones de $y' + ay = f$ con $y(0) = 0$ es un conjunto afín: si y_1 y y_2 son soluciones, en general $y_1 + y_2$ satisface

$$(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = f + f = 2f \neq f$$

(salvo que $f \equiv 0$). Por tanto no es un subespacio vectorial.

Intuiciones y formas alternativas

Ejercicio 2.1 De forma alternativa, si no se tiene soltura con la transformada de Laplace se puede resolver y luego intentar expresarlo como una convolución

La ecuación es lineal de primer orden:

$$y'(x) + a y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad a \neq 0.$$

Usamos **factor integrante**. Multiplicamos por e^{ax} :

$$e^{ax} y'(x) + a e^{ax} y(x) = e^{ax} f(x).$$

El miembro izquierdo es una derivada:

$$(e^{ax} y(x))' = e^{ax} f(x).$$

Se integra:

$$e^{ax} y(x) - e^{a \cdot 0} y(0) = \int_0^x e^{as} f(s) ds.$$

Como $y(0) = 0$, queda

$$y(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{as} f(s) ds.$$

Ahora la reescribimos para ver la **convolución**:

$$y(x) = \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds.$$

Y esto ya está expresado como una convolución:

$$g(t) = e^{-at}$$

la convolución en $[0, \infty)$ es

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(s) g(x-s) ds,$$

y por tanto

$$y(x) = (f * g)(x) = (f * e^{-a\cdot})(x).$$

Ejercicio 2.2

Aunque es cómodo utilizar la solución encontrada para este apartado, no es necesaria.

Sea y_1 la solución que hemos hallado (o no) del problema no homogéneo

$$\begin{cases} y'(x) + ay(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{cases}$$

Si $f(x) = 0$ para todo $x \geq 0$ entonces y_1 además es solución del problema homogéneo:

$$\begin{cases} y'(x) + ay(x) = 0, \\ y(40) = y_1(40), \\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{cases}$$

Este problema por ser homogéneo sabemos que tiene solución de la forma ce^{-ax} .

Por la condición de Cauchy se tiene:

$$y(40) = ce^{-a \cdot 40} = y_1(40) \implies c = \frac{y_1(40)}{e^{-a \cdot 40}}$$

Ejercicio 2.3

Otra manera de justificar que no es espacio vectorial es aplicando el teorema de unicidad.

Como la solución es única entonces es un espacio vectorial de un elemento. El único espacio vectorial de un elemento es el 0, luego es espacio vectorial si y solo si $f = 0$

Resultado Final

1. Solución (convolución):

$$y(x) = \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds = (f * e^{-a\cdot})(x).$$

2. Si $f(x) = 0$ para todo $x \geq 40$, entonces para $x \geq 40$:

$$y(x) = e^{-ax} \int_0^{40} e^{as} f(s) ds = c e^{-ax}, \quad c = \int_0^{40} e^{as} f(s) ds.$$

3. Para f fijo, el conjunto de soluciones con $y(0) = 0$ **no** es un espacio vectorial (salvo el caso trivial $f \equiv 0$).

Ejercicio 3

Enunciado

[2 pt] Ejercicio 3:

1. Clasifica los puntos ordinarios, singulares regulares y singulares irregulares de

$$2x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0.$$

[0.5]

2. Encuentra la ecuación indicial de

$$2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

de la solución centrada en 0. [0.75]

3. Justifica en función de las raíces de la ecuación indicial anterior cuántas soluciones l.i. se obtienen por el método de Frobenius. Especifica qué forma tienen y si son base del espacio de soluciones. ¿Qué garantiza el teorema de Frobenius sobre la convergencia de la solución? [0.75]

Resolución

3.1 Clasificación de puntos (ordinario / singular regular / singular irregular)

Consideramos

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0.$$

Dividimos por el coeficiente de y'' (donde no sea cero):

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

donde

$$P(x) = \frac{3x}{2x(x-2)^2} = \frac{3}{2(x-2)^2}, \quad Q(x) = \frac{x-2}{2x(x-2)^2} = \frac{1}{2x(x-2)}.$$

Los puntos singulares son los ceros de los denominadores: $x = 0$ y $x = 2$.

- Para $x_0 = 0$:

$P(x)$ es analítica en 0, $Q(x)$ tiene una singularidad de orden 1.

Luego $x = 0$ es **singular regular**.

- Para $x_0 = 2$:

$P(x)$ tiene una singularidad de orden 2

Luego $x = 2$ es **singular irregular**.

En cualquier $x_0 \notin \{0, 2\}$ el punto es **ordinario**.

3.2 Ecuación indicial (Frobenius en $x_0 = 0$)

Consideramos

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0.$$

Buscamos una solución de Frobenius centrada en 0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

Entonces

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}.$$

Sustituyendo:

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1 \right) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}.$$

Reindexando el último sumatorio,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r}.$$

El término de menor potencia ($n = 0$) da la **ecuación indicial**:

$$(2r(r-1) - r + 1)a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 - 3r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2r-1)(r-1) = 0.$$

Por tanto,

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1}{2}.$$

3.3 Número de soluciones por Frobenius y convergencia

Como $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$ son **raíces distintas** y

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z},$$

el método de Frobenius proporciona **dos soluciones linealmente independientes** del tipo

$$y_i(x) = x^{r_i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} x^n, \quad i = 1, 2.$$

En consecuencia, $\{y_1, y_2\}$ es un **conjunto fundamental** (y por tanto una base) del espacio de soluciones en cualquier intervalo $(0, R)$ donde tenga sentido la ecuación.

Además, el **teorema de Frobenius** garantiza existe un R tal que las series obtenidas convergen al menos para $0 < |x| < R$.

Resultado final

1. Para $2x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$:

- Puntos **ordinarios**: $x \neq 0, 2$.
- $x = 0$ **singular regular**.
- $x = 2$ **singular irregular**.

2. Para $2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0$ centrada en 0, la ecuación indicial es

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}.$$

3. Como $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, se obtienen **dos** soluciones l.i. de Frobenius (sin término logarítmico) y forman una base local del espacio de soluciones. El teorema de Frobenius garantiza convergencia en un entorno de 0.

Ejercicio 4

Enunciado

[2 pt] **Ejercicio 4:** Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + y(t) + 6t, \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t) - 10t + 4. \end{cases}$$

Resolucion

Forma matricial (separando los dos términos no homogéneos)

Definimos $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. El sistema se escribe como

$$X'(t) = AX(t) + tg + h,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por superposición buscamos

$$X(t) = X_h(t) + X_{p,h} + X_{p,t},$$

donde X_h resuelve el homogéneo, $X_{p,h}$ es un particular para h (constante) y $X_{p,t}$ es un particular para tg .

Sistema homogéneo

El homogéneo es $X' = AX$. Calculamos autovalores:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 7)(\lambda - 2).$$

Luego $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 2$.

- Para $\lambda_1 = 7$: buscamos el núcleo de

$$A - 7I = \begin{pmatrix} 6-7 & 1 \\ 4 & 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Resolver $(A - 7I)v = 0$ da, por ejemplo,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Para $\lambda_2 = 2$: buscamos el núcleo de

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 6-2 & 1 \\ 4 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolver $(A - 2I)v = 0$ da, por ejemplo,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X_h(t) = C_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Particular para el vector constante h (equilibrio)

Buscamos una solución constante $X_{p,h} = X_*$ tal que

$$0 = AX_* + h \iff AX_* = -h.$$

Resolviendo

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_* + y_* = 0, \\ 4x_* + 3y_* = -4, \end{cases}$$

obtenemos

$$x_* = \frac{2}{7}, \quad y_* = -\frac{12}{7}.$$

Así,

$$X_{p,h} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

Particular para el término tg (coeficientes indeterminados)

Buscamos un particular de la forma

$$X_{p,t}(t) = \alpha t + \beta,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ constantes. Sustituyendo en

$$X' = AX + tg$$

se tiene

$$\alpha = A(\alpha t + \beta) + tg = (A\alpha + g)t + A\beta.$$

Igualando coeficientes de t y términos constantes:

$$A\alpha + g = 0, \quad A\beta = \alpha.$$

Como $\det(A) = 14 \neq 0$, existe A^{-1} y

$$\alpha = -A^{-1}g, \quad \beta = A^{-1}\alpha = -A^{-2}g.$$

Calculamos

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}g = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Y

$$\beta = A^{-1}\alpha = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -12 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ \frac{22}{7} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X_{p,t}(t) = \begin{pmatrix} -2t - \frac{6}{7} \\ 6t + \frac{22}{7} \end{pmatrix}.$$

4.5 Solución general

Sumando homogénea y particulares:

$$X(t) = C_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t - \frac{6}{7} \\ 6t + \frac{22}{7} \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{2t} - 2t - \frac{4}{7}, \\ y(t) = C_1 e^{7t} - 4C_2 e^{2t} + 6t + \frac{10}{7}. \end{cases}$$

Resultado final

Una solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{2t} - 2t - \frac{4}{7}, \\ y(t) = C_1 e^{7t} - 4C_2 e^{2t} + 6t + \frac{10}{7}. \end{cases}$$

Ejercicio 5

Enunciado

[2 pt] **Ejercicio 5:** Representa el plano de fases canónico y real del sistema (v_1, v_2 son autovectores):

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + y(t), \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t) + 4. \end{cases}$$

1. Encuentra los puntos de equilibrio.
2. Calcula el comportamiento asintótico de la tangente a las órbitas (pendiente del vector (y', x')).
3. Explica la diferencia entre el primer plano y el segundo. ¿Qué transformaciones estás aplicando?
4. Determina si las órbitas son estables/inestables. Determina qué equilibrios son atractores/repulsores.

Resolución

Escribimos el sistema como

$$X'(t) = AX(t) + b, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Observación: la parte homogénea $X' = AX$ (autovalores y autovectores de A) **ya se resolvió en el Ejercicio 4**, y se obtuvo

$$\lambda_1 = 7, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Puntos de equilibrio

Un equilibrio X_* satisface $0 = AX_* + b$:

Ya se calculó en el apartado anterior, el sistema tiene un único equilibrio:

$$X_* = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Planos de fases

El plano canónico es el plano del sistema homogéneo. Se puede dibujar a partir de la solución encontrada o de la caracterización con traza y determinante. El plano de fases es el mismo tras una aplicación lineal y una traslación detalladas más adelante.



Comportamiento asintótico de la tangente a las órbitas

La pendiente del campo (tangente a la órbita en el punto (x, y)) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{4x + 3y + 4}{6x + y} \quad (\text{si } 6x + y \neq 0).$$

Además, a lo largo de una trayectoria no estacionaria, como

$$X(t) = X_* + C_1 e^{7t} v_1 + C_2 e^{2t} v_2,$$

se tiene:

- Si $C_1 \neq 0$, entonces cuando $t \rightarrow +\infty$ domina $e^{7t} v_1$ y la órbita se vuelve tangente a v_1 , es decir, en el plano real

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

- Si $C_1 = 0$ (órbita sobre la dirección lenta), entonces cuando $t \rightarrow +\infty$ la órbita es tangente a v_2 y

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{-4}{1} = -4.$$

(Análogamente, cuando $t \rightarrow -\infty$ las trayectorias tienden al equilibrio y lo hacen en la dirección del autovector asociado al autovalor más pequeño en módulo, aquí v_2 , salvo el caso especial $C_2 = 0$.)

Relación entre los planos

La relación entre el plano de fases del sistema homogéneo sobre los autovectores y el real está descrita por el cambio de base que es una aplicación lineal.

A esto se le añade la solución particular, al ser un equilibrio esta aplicación es una traslación.

5.4 Estabilidad y atractor/repulsor

Como los autovalores del sistema homogéneo son

$$\lambda_1 = 7 > 0, \quad \lambda_2 = 2 > 0,$$

el equilibrio X_* es un **nodo inestable**: todas las trayectorias (salvo el equilibrio) se alejan de X_* cuando $t \rightarrow +\infty$.

Por tanto:

- El equilibrio X_* es **inestable**.
- X_* es un **repulsor** (y no es atractor).

Resultado final

- Equilibrio único: $X_* = \left(\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}\right)$.
- Traslación $Z = X - X_*$ reduce a $Z' = AZ$; en la base propia (u, v) : $u' = 7u$, $v' = 2v$.
- Pendiente del campo: $\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 3y + 4}{6x + y}$; asintóticamente las órbitas se alinean con v_1 (pendiente 1) salvo la solución sobre v_2 (pendiente -4).
- Clasificación: nodo **inestable**; X_* es **repulsor**.

Ejercicio Extra

Enunciado

[1 pt] **Extra:** Para conseguir el punto extra hay que ganar un juego. Sean a, x números reales, escogemos un número x_1 de manera aleatoria uniforme en $[0, x]$. Si el número es menor que a se termina el juego, si no se repite escogiendo en $[0, x_1]$.

Por teoría de probabilidad el número esperado de tiros $T(x)$ satisface la siguiente ecuación:

$$T(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_a^x T(s) ds$$

Además, como el juego termina al llegar a un número menor que a , $T(a) = 1$.

La pregunta para poder apostar y ganar es: ¿Cuál es el número esperado de tiros?

Resolución

Para $x \geq a$ partimos de la ecuación integral:

$$T(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_a^x T(s) ds.$$

Aunque no tenemos experiencia resolviendo ecuaciones integrales, sería muy útil convertir la ecuación a una EDO fácil de resolver. Para ello podríamos derivar pero al haber un producto $(\frac{1}{x} \int_a^x T(s) ds)$ no eliminaríamos la integral.

Por lo tanto, primero multiplicamos por x :

$$xT(x) = x + \int_a^x T(s) ds.$$

Derivamos respecto a x (para $x > a$) y usamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{d}{dx}(xT(x)) = \frac{d}{dx} \left(x + \int_a^x T(s) ds \right) \implies T(x) + xT'(x) = 1 + T(x).$$

Por tanto,

$$xT'(x) = 1 \implies T'(x) = \frac{1}{x}.$$

Integrando,

$$T(x) = \ln x + C.$$

Imponiendo la condición $T(a) = 1$:

$$1 = \ln a + C \implies C = 1 - \ln a.$$

Así, para $x \geq a$,

$$T(x) = 1 + \ln \left(\frac{x}{a} \right).$$

Además, si $0 < x \leq a$, entonces $x_1 \in [0, x] \subset [0, a]$ y el juego termina en el primer tiro, luego $T(x) = 1$.

Resultado final

$$T(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq a, \\ 1 + \ln \left(\frac{x}{a} \right), & x \geq a. \end{cases}$$

Anexos: resolución de los sistemas lineales

En el Ejercicio 4 aparece la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 14 \neq 0.$$

Recordatorio: si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(M) = ad - bc \neq 0,$$

entonces

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Por tanto A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

A.1 Particular para el vector constante (equilibrio)

El sistema no homogéneo con término constante es

$$X'(t) = AX(t) + h, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Un equilibrio X_* satisface

$$0 = AX_* + h \iff AX_* = -h.$$

Como A es invertible,

$$X_* = A^{-1}(-h) = -A^{-1}h.$$

Calculamos

$$A^{-1}h = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -4 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$X_* = -A^{-1}h = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

A.2 Particular para el término proporcional a t

Para el término tg del Ejercicio 4, con

$$g = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix},$$

buscamos un particular de la forma $X_{p,t}(t) = \alpha t + \beta$. Sustituyendo en $X' = AX + tg$ y comparando coeficientes se obtiene el sistema lineal

$$A\alpha + g = 0, \quad A\beta = \alpha.$$

Usando la inversa:

$$\alpha = -A^{-1}g, \quad \beta = A^{-1}\alpha.$$

Calculamos

$$A^{-1}g = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Después,

$$\beta = A^{-1}\alpha = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -12 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ \frac{22}{7} \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X_{p,t}(t) = \alpha t + \beta = \begin{pmatrix} -2t - \frac{6}{7} \\ 6t + \frac{22}{7} \end{pmatrix}.$$