UNIVERSIDAD NEBRIJA

ALUMNO:

EPS

Asignatura: G0900013 - Ecuaciones diferenciales ordinarias		
Curso: 2025/2026	Examen: Final/Parcial	Fecha: 17-12-2025
Semestre: 1	Convocatoria: Ordinaria	

[2 pt] Ejercicio 1: Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + \lambda y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

y dadas las siguientes funciones:

$$\phi_1(x) = e^{-x/2} \sin x$$
$$\phi_2(x) = e^{-x/2} (\sin x + \sin(2x))$$
$$\phi_3(x) = e^{-x/2} \cos x$$
$$\phi_4(x) = e^{-x/2} \sin(2x)$$

1. Determina cuales funciones son autofunciones del problema [0.5]
2. Para las autofunciones, calcular el autovalor correspondiente [0.5]
3. Sea E el subespacio generado por las autofunciones que hayas identificado, define una base ortonormal respecto al producto escalar natural asociado a la formulación de Sturm–Liouville del problema [0.5]
4. Calcula las siguientes integrales: [0.5]
   a. $\int_0^\pi e^x \ \phi_1 \, \phi_4 \, dx$
   b. $\int_0^\pi [\phi_1' \phi_3 + \phi_3' \phi_1] \ dx$

[2 pt] Ejercicio 2: Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} y'(x) + \mathrm{a}y(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \\ a \in \mathbf{R}, \mathrm{a} \neq 0 \end{cases}$$

1. Expresar la solución como una convolución [1]
2. Si f(x) = 0 para todo $x \ \geq 40$, demostrar que existe una constante c tal que la solución es ce^{-ax} para todo $x \ \geq 40$. Hallar el valor de c. [0.5]
3. ¿El conjunto de soluciones de este problema es un espacio vectorial? Justifica tu respuesta [0.5]

[2 pt] Ejercicio 3:

1. Clasifica los puntos ordinarios, singulares regulares y singulares irregulares de [0.5]
$$2x(x\text{-}2)^2 y'' + 3xy' + (x\text{-}2)y = 0$$
2. Encuentra la ecuación indicial de $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$ de la solución centrada en 0. [0.75]
3. Justifica en función de las raíces de la ecuación indicial anterior cuantas soluciones l.i. se obtienen por el método de Frobenius. Especifica que forma tienen y si son base del espacio de soluciones. ¿Qué garantiza el teorema de Frobenius sobre la convergencia de la solución?[0.75]

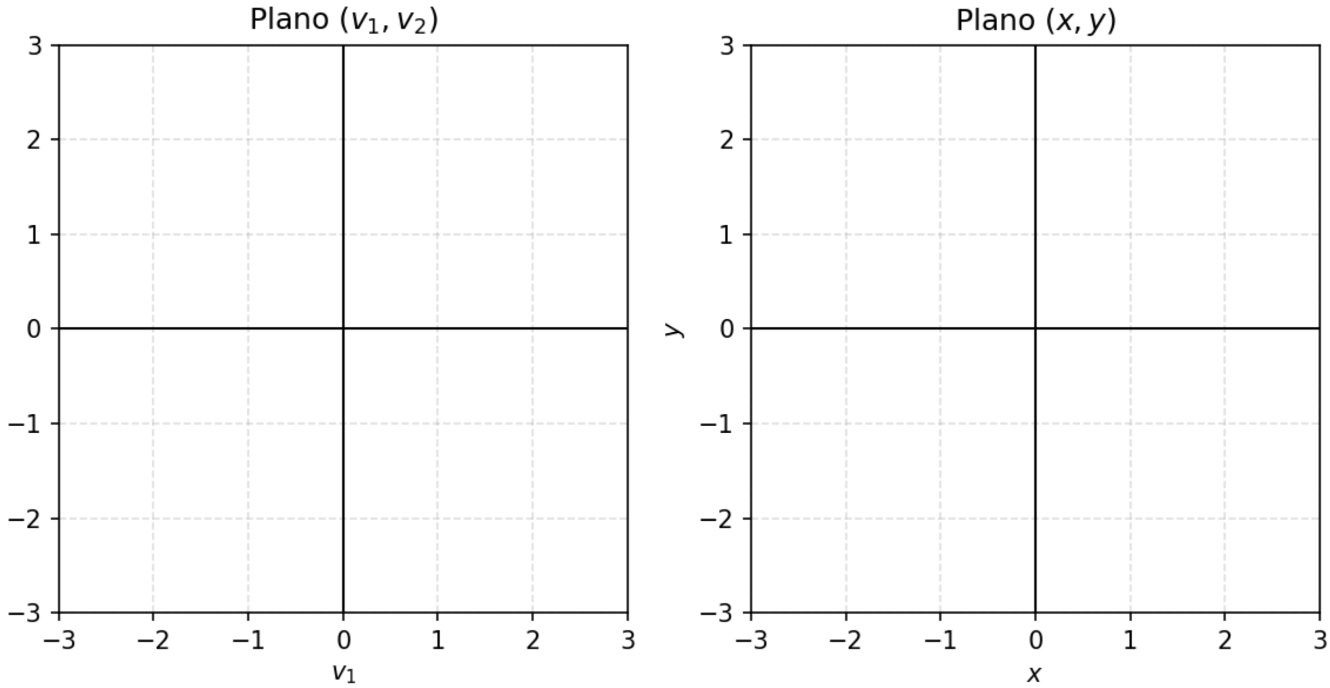
[2pt] Ejercicio 4: Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 6x + y + 6t \\ y' = 4x + 3y - 10t + 4 \end{cases}$$

[2pt] Ejercicio 5: Representa el plano de fases canónico y real del sistema (v_1, v_2 son autovectores):

$$\begin{cases} x' = 6x + y \\ y' = 4x + 3y + 4 \end{cases}$$

1. Encuentra los puntos de equilibrio
2. Calcula el comportamiento asintótico de la tangente a las orbitas (pendiente del vector (y', x'))
3. Explica la diferencia entre el primer plano y el segundo. ¿Qué transformaciones estás aplicando?
4. Determina si las órbitas son estables/inestables. Determina que equilibrios son atractores/repulsores.



[1 pt] Extra: Para conseguir el punto extra hay que ganar un juego. Sean a, x números reales, escogemos un numero x_1 de manera aleatoria uniforme en [0, x]. Si el número es menor que a se termina el juego, si no se repite escogiendo en $[0, x_1]$.

Por teoría de probabilidad el número esperado de tiros $T(x)$ satisface la siguiente ecuación:

$$T(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_a^x T(s)ds$$

Además, como el juego termina al llegar a un número menor que a, $T(a) = 1$.

La pregunta para poder apostar y ganar es: ¿Cuál es el número esperado de tiros?

Nota: la siguiente integral es necesaria: $\int_0^\pi sin^2(x)\ dx = \frac{\pi}{2}$