

**Ejercicio 1 (2.5 pts):** Sea el problema de valor inicial  $y' = \frac{x}{y}, y(x_0) = y_0$

- a) Definir el campo de direcciones asociado a la EDO y el determinar el conjunto de curvas isoclinas.
- b) Representar en el plano cartesiano el campo y las isoclinas.
- c) Estudiar el comportamiento de las soluciones:
  - (a) Hallar posibles asíntotas y monotonía de las soluciones.
  - (b) Encontrar y definir las regiones del plano  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que si  $(x_0, y_0) \in U$  entonces la solución también está contenida en dicha región.

d) Hallar analíticamente la solución en forma implícita y explícita.

e) Hallar todas las soluciones para los siguientes valores iniciales y definir su dominio:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

f) Suponiendo que la EDO modeliza el comportamiento de dos especies animales  $x$  e  $y$ , describir la relación entre las dos especies.

**SOLUCIÓN**

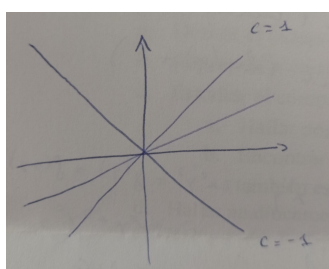
a) Definimos el campo de direcciones  $F : (x, y) \longrightarrow \left(1, \frac{x}{y}\right)$ .

Las isoclinas son el conjunto de curvas donde la pendiente del campo de direcciones es constante:

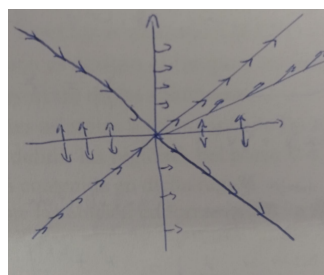
$$y' = c = \frac{x}{y} \iff y = \frac{x}{c}$$

Por lo tanto las isoclinas son el conjunto de rectas vectoriales con pendiente  $\frac{1}{c}$ .

b) Gráfico de las isoclinas y campo vectorial:



Isoclinas



Campo de direcciones

c) Por el gráfico y la solución analítica del siguiente apartado se observa que las rectas con pendientes  $1, -1$  son asíntotas y que las soluciones son monótonas crecientes para  $xy > 0$  y decrecientes en  $xy < 0$ . Las regiones del apartado (b) son las definidas por el cruce entre las dos asíntotas. Las soluciones son hipérbolas y las dos rectas son sus directrices.

d) Resolución:

**1 Separar variables:** Reordenamos la ecuación:

$$y dy = x dx$$

**2 Integrar:** Integramos ambos lados:

$$\int y dy = \int x dx$$

Resolviendo las integrales:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

donde  $C$  es la constante de integración. Hemos hallado la forma implícita.

**3 Despejar  $y$  :** Multiplicamos por 2 para simplificar:

$$y^2 = x^2 + 2C$$

Denotamos  $C_1 = 2C$

$$y^2 = x^2 + C_1$$

Despejamos  $y$ :

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C_1}$$

e) Encontrar la solución y su dominio de los dos PVI:

Encontremos el valor del parámetro  $C_1$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C_1}$$

Para  $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$  tenemos que:

$$1 = \pm \sqrt{2^2 + C_1}$$

Cogemos el signo positivo y despejamos:

$$1 = \sqrt{4 + C_1} \implies 1 = 4 + C_1 \implies C_1 = -3$$

La solución particular es:

$$y = \sqrt{x^2 - 3}$$

Para encontrar el dominio, resolvemos la desigualdad:

$$x^2 - 3 \geq 0 \implies x^2 \geq 3 \implies |x| \geq \sqrt{3} \implies x \leq -\sqrt{3} \text{ o } x \geq \sqrt{3}$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$D = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

De forma análoga para  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$  se obtienen dos soluciones:  $y = \pm x$ . Es interesante destacar que a pesar de que en este punto no se puede garantizar ni existencia ni unicidad de soluciones por los teoremas de Picard y Peano vistos en clase, hay dos soluciones.

- f) Si la EDO modelizase el comportamiento de dos poblaciones podemos deducir que es un modelo cooperativo y que con el crecer de las poblaciones su proporción tiende a 1. Esto se debe a que las soluciones son monótonas crecientes en el cuadrante  $x > 0, y > 0$ , y a la existencia de la asíntota  $y = x$ .

**Ejercicio 2 (2.5 pts):** Hallar el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales elementales especificando el método de resolución aplicado:

- a)  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$   
 b)  $3x^2y + 4xy^2 + y'(x^3 + 4x^2y + 9y^2) = 0$   
 c)  $y^{(4)} - y = 0$   
 d)  $y^{(4)} - 1 = 0$   
 e)  $xy' + y = y^2 \ln(x)$

**SOLUCIÓN:**

- a) **Ecuación homogénea:**

$$x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Aplicando el cambio de variable  $y = vx$  tenemos que:  $y' = v + xv'$

$$xv + x^2 \frac{dv}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2v^2} + xv$$

$$x^2 \frac{dv}{dx} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 - v^2}$$

Resolviendo por separación de variables:

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\arcsin(v) = \ln|x| + C$$

$$v = \sin(\ln|x| + C)$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$y = x \sin(\ln|x| + C)$$

Al aplicar separación de variable hemos supuesto que  $\sqrt{1 - v^2} \neq 0$ , veamos si esto nos ha hecho perder soluciones:

Si  $\sqrt{1 - v^2} = 0$  tenemos que:

$$v^2 = 1 \implies \left| \frac{y}{x} \right| = 1 \implies y = \pm x$$

Se comprueba fácilmente que las dos funciones son soluciones de la EDO.

b) **Ecuación exacta:**

La ecuación  $3x^2y + 4xy^2 + (x^3 + 4x^2y + 9y^2) y' = 0$  es exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y} (3x^2y + 4xy^2) = 3x^2 + 8xy = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + 4x^2y + 9y^2)$$

Recordando la teoría, queremos hallar una función  $f$  tal que:

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = M(x, y(x)) + N(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x)$$

En este caso:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 4xy^2 \quad y \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4x^2y + 9y^2$$

Integrando la primera igualdad con respecto de  $x$ , se obtiene que

$$f(x, y) = x^3y + 2x^2y^2 + g(y)$$

Derivando respecto de  $y$  e igualando a  $N$  tenemos que:

$$x^3 + 4x^2y + g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N = x^3 + 4x^2y + 9y^2$$

$$x^3 + 4x^2y + 9y^2 = x^3 + 4x^2y + g'(y)$$

Resolviendo la nueva ecuación por separación de variables:

$$g(y) = 3y^3 + c.$$

Reemplazando el valor de  $g$  se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x, y(x)) &= 0 \\ f(x, y) &= C \end{aligned}$$

$$x^3y + 2x^2y^2 + 3y^3 = C$$

c) **Ecuación lineal de orden 4:**  $y^{(4)} - y = 0$

El polinomio asociado es  $\lambda^4 - 1 = 0$ . Sabemos que las soluciones de  $\lambda^4 = 1$  son las cuatro raíces de la unidad  $\{1, -1, i, -i\}$ . Por teoría, el conjunto de soluciones es el conjunto generado por la combinación lineal de  $\{e^x, e^{-x}, \sin x, \cos x\}$

d) **Ecuación lineal de orden 4:**  $y^{(4)} - 1 = 0$

Esta ecuación se resuelve fácilmente integrando 4 veces:

$$1. \quad y'''(x) = \int 1 \, dx = x + C_1.$$

$$2. \quad y''(x) = \int (x + C_1) \, dx = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

$$3. \quad y'(x) = \int \left( \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \right) \, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

$$4. \quad y(x) = \int \left( \frac{x^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \right) \, dx = \frac{x^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Simplificando las constantes:

$$y(x) = \frac{x^4}{24} + C'_1x^3 + C'_2x^2 + C'_3x + C'_4,$$

**Nota:** Solo era necesario calcular el denominador del primer sumando del polinomio ya que todos los demás se ven "absorbidos" por las constantes.

e) Ecuación de Bernoulli  $xy' + y = y^2 \ln(x)$  que se resuelve a través del cambio de variable  $u = y^{-1}$  y se convierte en una EDO lineal:

$$-u' + \frac{1}{x}u = \frac{\ln x}{x}.$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$c \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = c|x|$$

Resolviendo la general por variación de constantes, suponemos que la solución es de la forma

$$u(x) = c(x)x.$$

Derivando ( $u' = c'x + c'$ ) y sustituyendo en la ecuación se tiene que

$$-c'(x)x - c(x) + c(x) = \frac{\ln x}{x}$$

y, por tanto, que

$$c(x) = - \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c.$$

Donde la integral se resuelve por partes:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} \, dx,$$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du, \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{\ln x}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) dx.$$

Simplificando:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x} + C.$$

Para terminar, deshaciendo el cambio de variable:

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$$

**Ejercicio 3 (2.5 pts):** Sea  $g(x)$  una función con derivada continua en  $\mathbb{R}$  hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial aplicando variación de las constantes:

$$y''' - y'' - y' + y = g(x)$$

**SOLUCIÓN:**

**Paso 1:** Resolvamos primero la homogénea asociada:

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

El polinomio característico de la ecuación es:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Suponiendo que las raíces son enteras y como el polinomio no es un cubo parece plausible suponer que las raíces son 1 con multiplicidad 2 y  $-1$  con multiplicidad 1. Desarrollando se comprueba de hecho que:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

La solución de la homogénea asociada es:

$$c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$$

**Paso 2:** Variación de constantes

El método de variación de las constantes consiste en encontrar una solución particular de la misma forma de la homogénea donde los coeficientes son funciones:

$$y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x + u_3(x)e^{-x} \quad (1)$$

donde los coeficientes son caracterizados por las ecuaciones diferenciales:

$$u'_k(x) = (-1)^{1+k} g(x) \frac{W_k [e^x, xe^x, e^{-x}](x)}{W [e^x, xe^x, e^{-x}](x)}, \quad k = 1, 2, 3$$

**Paso 2.1: Cuentas**

Calculemos el wronskiano denominador:

$$W [e^x, xe^x, e^{-x}] (x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila a la segunda y a la tercera queda:

$$W(x) = e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4e^x$$

Calculemos ahora  $W_i$ :

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} xe^x & e^{-x} \\ (x+1)e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ (x+1) & -1 \end{vmatrix} = -2x - 1.$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & (x+1) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

**Paso 2.2: Solución** La expresión final de cada coeficiente es:

$$u_k(x) = \int_{x_0}^x (-1)^{1+k} g(s) \frac{W_k [e^s, se^s, e^{-s}] (s)}{W [e^s, se^s, e^{-s}] (s)} ds, \quad k = 1, 2, 3$$

Sustituyendo en la ecuación de la solución particular (1):

$$y(x) = e^x \int_{x_0}^x \frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s} ds - xe^x \int_{x_0}^x \frac{g(s)(-2)}{4e^s} ds + e^{-x} \int_{x_0}^x \frac{g(s)e^{2s}}{4e^s} ds$$

**Ejercicio 4 (2.5 pts):** Demostrar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a) Las funciones  $e^x, xe^x, x^2e^x$  son linealmente independientes.  
Las funciones  $y = x^3, z = |x^3|$  son linealmente independientes.
- b) Dadas dos soluciones  $y_1, y_2$  de una ecuación diferencial lineal de orden superior completa:

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

Hallar una solución de la ecuación homogénea asociada.

- c)  $y = 1/x$  es solución de la ecuación diferencial  $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$   
Se puede emplear el cambio de variable  $y = z(x)/x$  para reducir el orden de la ecuación anterior.

d) Dada una EDO lineal:

$$y' = f(x)y$$

donde  $f$  es periódica con periodo  $T$ , es decir:

$$f(x + T) = f(x)$$

1. Sea  $y(x)$  una solución del PVI en  $x_0, y_0$  entonces existe una constante  $A$  tal que

$$y(x_0 + nT) = A^n y(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. El comportamiento asintótico de la función depende únicamente del valor del parámetro  $A$ .

### SOLUCIÓN:

a) En los dos casos son linealmente independientes:

Para el primero, son li porque hemos demostrado en clase que  $e^x, xe^x, x^2e^x$  generan el conjunto de soluciones de la EDO lineal de orden 3 con polinomio característico

$$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

que es la ecuación:

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$$

Para las funciones  $y = x^3, z = |x^3|$  supongamos que existen  $c_1, c_2 \neq 0$  tal que

$$c_1 x^3 + c_2 |x^3| = 0$$

Evaluando en los puntos 1, -1:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \iff c_1 = c_2 = 0$$

b) La ecuación homogénea asociada es:

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y = 0$$

Es trivial que  $y = 0$  es solución. Si no también es fácil demostrar que  $y_2 - y_1$  también es solución.

c) Sustituyendo es fácil comprobar que  $y = \frac{1}{x}$  es solución de

$$x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$$

Para saber si el cambio de variable reduce el orden es suficiente con recordar que se demostró de forma general en clase utilizando la fórmula de Leibnitz para derivadas del producto de funciones.

d) La ecuación lineal  $y' = f(x)y$  tiene como solución:

$$y = e^{\int_{x_0}^x f(s)ds}$$

Veamos como se comporta la integral de una función periódica. Sea  $x = x_0 + nT + r$  donde  $T$  es el periodo y  $0 \leq r < T$ .

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f &= \int_{x_0}^{x_0+nT} f + \int_{x_0+nT}^{x_0+nT+r} f \\ &= n \int_{x_0}^{x_0+T} f + \int_{x_0}^{x_0+r} f \\ &= nB + \int_{x_0}^{x_0+r} f \end{aligned}$$

Evaluando la exponencial obtenemos que:

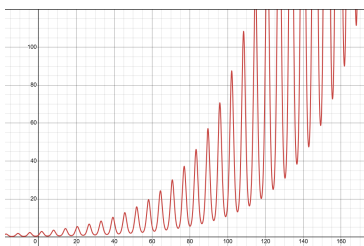
$$\begin{aligned} y &= e^{\int_{x_0}^x f(s)ds} \\ &= e^{nB + \int_{x_0}^{x_0+r} f} \\ &= A^n e^{\int_{x_0}^{x_0+r} f} \end{aligned}$$

En particular se cumple para todo  $x \in \mathbb{R}$  que:

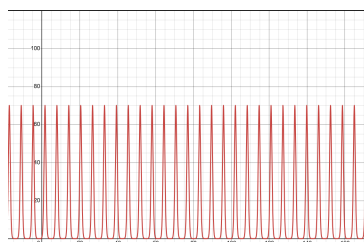
$$y(x + T) = Ay(x)$$

Esta igualdad determina el comportamiento de la solución, tenemos tres comportamientos en función del valor de A:

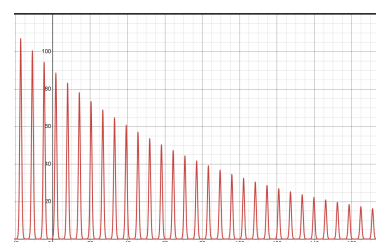
- (a)  $A = 1$  se cumple para todo  $x$  que  $y(x + T) = y(x)$  por lo tanto la solución es **periódica**.
- (b)  $A > 1$  se cumple para todo  $x$  que  $y(x + T) > y(x)$  por lo tanto la solución **crece** en cada período de forma exponencial.
- (c)  $A < 1$  se cumple para todo  $x$  que  $y(x + T) < y(x)$  por lo tanto la solución **decrece** en cada período de forma exponencial.



$$f = \cos x + 0.034;$$



$$f = 4.25 * \cos x;$$



$$f = 4.5 \cos(x) - 0.01$$