

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Apuntes del Grado en Matemáticas Aplicadas y Física - Universidad Nebrija

Pablo Lobato de la Cruz

2026-03-26

# Tabla de contenidos

<b>Prefacio</b>	<b>1</b>
Introducción . . . . .	1
Enfoque del contenido . . . . .	1
Sobre el material . . . . .	2
Objetivos de Aprendizaje . . . . .	2
Prerequisitos . . . . .	2
Contenido detallado . . . . .	2
Agradecimientos . . . . .	3
<b>1. Introducción a las Ecuaciones diferenciales</b>	<b>4</b>
1.1. Introducción . . . . .	4
1.2. Notación y clasificación de ecuaciones . . . . .	8
1.3. Soluciones de ecuaciones . . . . .	11
1.4. Modelos . . . . .	13
<b>2. Modelos poblacionales</b>	<b>15</b>
<b>3. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador</b>	<b>22</b>
3.1. Modelo matemático . . . . .	22
3.2. Clasificación según el amortiguamiento . . . . .	22
3.3. Visualización interactiva . . . . .	24
3.4. Comparación de regímenes . . . . .	24
3.5. Aplicaciones prácticas . . . . .	24
3.6. Animación . . . . .	25
<b>4. Sistemas de ecuaciones</b>	<b>26</b>
4.1. Introducción . . . . .	26
4.2. Sistemas Lineales de dimensión $n$ . . . . .	28
4.3. Estructura del conjunto de soluciones . . . . .	31
4.4. Matriz fundamental de soluciones . . . . .	36
4.5. Sistemas lineales con coeficientes constantes . . . . .	39
<b>5. Planos de fases</b>	<b>49</b>
5.1. Aplicaciones Prácticas . . . . .	49
5.2. Conceptos Clave . . . . .	50
5.3. Visualizador Interactivo . . . . .	50
5.4. Galería de Sistemas Clásicos . . . . .	50
5.5. Método Numérico: Runge-Kutta 4 . . . . .	50
<b>6. Clasificación de Sistemas Lineales 2D</b>	<b>54</b>
6.1. Casos . . . . .	54
6.2. Clasificación por Traza y Determinante . . . . .	54
6.3. Visualización 3D: Sistemas Tridimensionales . . . . .	55
6.4. Del Plano al Espacio: ¿Por qué 3D? . . . . .	55
6.5. Ejemplos de Sistemas 3D . . . . .	55
6.6. Chaos en Sistemas 3D . . . . .	65

6.7. Aplicaciones Prácticas . . . . .	65
<b>7. Conservación del Volumen en Sistemas Hamiltonianos</b>	<b>67</b>
<b>I Otros Recursos</b>	<b>68</b>
<b>8. Índices de Contenido Matemático</b>	<b>69</b>
8.1. Definicións . . . . .	69
8.2. Teoremas . . . . .	69
8.3. Proposicións . . . . .	70
8.4. Corolarios . . . . .	70
8.5. Ejemplos . . . . .	70
8.6. Ejercicios . . . . .	70
8.7. Solucións . . . . .	71
8.8. Visualizacións . . . . .	71
<b>9. Exámenes y guías docentes</b>	<b>72</b>
9.1. Guías Docentes . . . . .	72
9.2. Exámenes . . . . .	72
<b>10.Herramientas de visualización</b>	<b>73</b>
10.1. Visualizador Plano de fases 1D: . . . . .	73
10.2. Plano 2D . . . . .	73
10.3. Clasificador de Órbitas de Sistemas lineales . . . . .	73
10.4. Potenciales y planos de fases . . . . .	73
<b>II Actividades</b>	<b>74</b>
<b>11.Vibración de un Tambor Circular</b>	<b>75</b>
11.1. Ecuación de Ondas Bidimensional . . . . .	75
11.2. Separación de Variables . . . . .	76
11.3. Condición de Frontera y Autovalores . . . . .	77
11.4. Modos Normales de Vibración . . . . .	78
11.5. Visualizador Interactivo de Modos de Vibración . . . . .	78
11.6. Figuras de Chladni: Visualizando las Vibraciones . . . . .	81
<b>12.Modelo de Neurona Integrate-Fire-Leakage</b>	<b>83</b>
12.1. Introducción . . . . .	83
12.2. Caso homogéneo: neurona sin estimulación externa . . . . .	84
12.3. Caso no homogéneo: corriente constante . . . . .	86
12.4. Caso general: corriente variable $I(t)$ . . . . .	89
12.5. Caso particular: corriente tipo escalón (Heaviside) . . . . .	92
12.6. Caso particular: corriente tipo impulso (Delta de Dirac) . . . . .	96
12.7. Mecanismo de disparo (Firing threshold) . . . . .	98
<b>13.Corriente con ruido: una introducción a procesos estocásticos</b>	<b>105</b>

# Prefacio

Este libro ofrece una introducción a las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**, orientada a estudiantes de los grados en Matemáticas y Física Aplicada. El contenido sigue el programa oficial de la asignatura y combina el desarrollo teórico con herramientas prácticas para abordar y resolver problemas.

El objetivo es que sea un material válido como referencia para cualquier disciplina STEM que necesite una introducción a esta rama de las matemáticas. Por eso se busca un equilibrio entre rigor teórico, claridad expositiva y enfoque práctico.

Para ideas para extender, erratas o cualquier otro tema relacionado con los apuntes, contactar a [pablolobatodelacruz+ode@gmail.com](mailto:pablolobatodelacruz+ode@gmail.com)

## Introducción

Al igual que la Estadística es la disciplina de las matemáticas que estudia la incertidumbre, o que la Geometría se ocupa de la forma y el espacio, **las Ecuaciones Diferenciales constituyen la rama que estudia el cambio**. En esencia, una ecuación diferencial describe cómo una cantidad varía en función de otra, caracterizando una función a través de su tasa de cambio o **derivadas**.

El estudio de las ecuaciones diferenciales surge de la necesidad de modelar fenómenos naturales y **procesos dinámicos evolucionarios**: el crecimiento de una población, el enfriamiento de un cuerpo, la descarga de un condensador, el movimiento de un péndulo o la propagación de una enfermedad. En todos ellos, la información esencial no proviene de valores aislados, sino de cómo esas magnitudes cambian con respecto al tiempo o a otras variables. Por ejemplo:

$$y' = y$$

El desarrollo de las ecuaciones diferenciales está íntimamente ligado a la historia de la ciencia. Desde **Newton** y **Leibniz**, quienes establecieron las bases del cálculo, hasta **Euler**, **Lagrange** y **Laplace**, que las convirtieron en un lenguaje universal de la física, las EDO han sido la herramienta central para expresar las leyes del mundo en forma matemática.

Este libro está dedicado al estudio sistemático de esas ecuaciones, sus **métodos de resolución y su interpretación**. Nuestro objetivo va más allá de la técnica: busca mostrar las ideas profundas sobre la dinámica de los sistemas, el orden oculto del cambio y la belleza del razonamiento que los describe.

## Enfoque del contenido

En este texto nos centraremos exclusivamente en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Nuestro propósito será doble: **comprender sus métodos de resolución y analizar su interpretación geométrica y cualitativa**.

El estudio analítico nos permitirá encontrar **soluciones explícitas o implícitas**, mientras que el enfoque geométrico nos ayudará a visualizar el comportamiento de las trayectorias, los campos de direcciones y los puntos de equilibrio asociados a cada sistema. De este modo, aprenderemos no solo a **calcular soluciones**, sino también a **interpretar su significado dinámico**.

## Sobre el material

El libro está diseñado para ser autocontenido. Se puede descargar el **pdf** (enlace en el título del índice a la izquierda) aunque hay material interactivo exclusivo en la **web**.

## Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar este curso, el estudiante será capaz de:

- Comprender los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales ordinarias
- Clasificar y resolver diferentes tipos de EDO de primer orden y de orden superior
- Aplicar técnicas analíticas para sistemas de ecuaciones lineales
- Utilizar métodos cualitativos para analizar la estabilidad de sistemas
- Resolver problemas de valor inicial y de frontera
- Aplicar las EDO a problemas de modelado en ciencias e ingeniería

## Prerequisitos

## Contenido detallado

### 1. Ecuaciones diferenciales y sus soluciones

- Introducción a las EDO y terminología.
- El problema de Cauchy.
- EDO como modelos.
- Curvas integrales.
- Introducción a los sistemas dinámicos y aplicaciones.

### 2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

- EDO variables separables y homogéneas.
- EDO exactas.
- EDO lineales.
- EDO segundo orden. Reducción de orden.
- Modelos con EDO de primer orden.

### 3. EDO de orden superior y lineales

- Preliminares.
- Ecuaciones lineales de orden superior.
- Modelos con ecuaciones lineales.
- Ecuación de Cauchy - Euler.

### 4. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

- Sistemas lineales de primer orden.
- Matriz Exponencial.
- Planos de fases.
- Sistemas no lineales.

5. **Estabilidad**

6. **Teoría de Frobenius para EDO de segundo orden**

- Soluciones en puntos ordinarios.
- Soluciones en puntos singulares.

7. **Problemas de valor en la frontera**

- Problema de Sturm - Liouville.

8. **Transformada de Laplace**

- Definición y propiedades.
- Cálculo de transformadas y antitransformadas.
- Aplicación a la resolución de ecuaciones.

## Agradecimientos

Este material ha sido desarrollado de forma independiente como apoyo a la docencia en la Universidad Nebrija, a la que agradezco por la oportunidad de enseñar la asignatura. También agradezco a las personas que han contribuido al curso con los seminarios: Federico Herrero, Loreto Pelaez y Javier Gutiérrez.

# Capítulo 1

## Introducción a las Ecuaciones diferenciales

### 1.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son relaciones matemáticas entre una función y sus derivadas. Por ejemplo:

$$y' = ky \quad k \in \mathbb{R}$$

El estudio de estas ecuaciones se motiva por su capacidad para modelizar fenómenos naturales que se expresan naturalmente como ecuaciones diferenciales

**Ejemplo 1.1.** Un ejemplo conocido es el disparo parabólico, que surge de aplicar las leyes de Newton al movimiento de un proyectil. Un cañón dispara una bala desde la altura  $h_0$  con una velocidad de  $30m/s$  y un ángulo  $\alpha$ . Se puede expresar la posición de bala de cañón a través del siguiente sistema, donde el vector  $(x(t), y(t))$  describe la posición de la bala en cada instante de tiempo  $t$ :

$$\begin{cases} y'' = -9.81 \\ x'' = 0 \\ y'(0) = 30 \sin \alpha \\ x'(0) = 30 \cos \alpha \\ y(0) = h_0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

Este problema conocido por el lector introduce algunas preguntas clave de esta asignatura:

- ¿El problema tiene solución? ¿Es única?
- ¿Se puede resolver de forma explícita?
- ¿Se puede aproximar numéricamente?
- ¿Como varían las soluciones en función de los parámetros como gravedad y altura inicial?

Nuestra capacidad de entender y predecir fenómenos del mundo real depende directamente de comprender y analizar las ecuaciones diferenciales que lo describen.

**Ejercicio 1.1.** Resolver separadamente las ecuaciones del problema anterior  $y'' = -9.81$ ,  $x'' = 0$  y entender como se relacionan con el problema

### 1.1.1. Los tres enfoques distintos a las ecuaciones diferenciales

Las preguntas del ejemplo anterior adelantan los tres enfoques de estudio principales:

1. **Analítico:** centrado en calcular una expresión exacta de las soluciones
2. **Cualitativo:** centrado en describir el comportamiento de las soluciones sin resolverlas
3. **Numérico:** centrado en aproximar soluciones controlando el error

Estos apuntes se centran en **métodos de resolución analítica** y propiedades de **ecuaciones particulares**. Cursos posteriores profundizarán en análisis cualitativo (teoría de sistemas dinámicos), métodos numéricos y ecuaciones en derivadas parciales.

Antes de desarrollar la teoría formal, veamos qué tipo de preguntas se pueden responder sobre una ecuación diferencial simple.

### 1.1.2. Ejemplo informal: crecimiento bacteriano

A continuación se realiza un breve estudio de la ecuación  $y' = ay$ . El ejemplo está diseñado para que el **alumno intente** resolver todos los apartados.

**Ejemplo 1.2.** La ecuación  $y' = ay$  es una ecuación lineal de primer orden homogénea. Será objeto de estudio a lo largo de la asignatura.

El objetivo de este ejemplo es presentar de manera intuitiva como se pueden estudiar estos problemas.

1. Sin tener la solución, ¿**Cuando la solución es creciente/decreciente?**

*Solución 1.1.* Aunque no se tiene la solución, la ecuación diferencial aporta información sobre su derivada. En particular la función es creciente si y solo si  $y'(x) > 0$ .

$$y'(x) > 0 \iff ay(x) > 0 \iff \operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(a)$$

Esto quiere decir que depende de los valores de  $a$ : - Si  $a > 0$ , las soluciones positivas son crecientes y las negativas decrecientes. - Si  $a < 0$ , las soluciones positivas son decrecientes y las negativas crecientes.

A pesar de que no se conoce la solución, se pueden deducir algunas de sus características a partir de la ecuación:

2. Comprobar que  $y(x) = Ce^{ax}$  con  $C \in \mathbb{R}$  es **solución** de  $y' = ay$

*Solución 1.2.* La función  $y(x) = Ce^{ax}$  es solución de  $y' = ay$ . Para demostrarlo se sustituye en la expresión:

$$\frac{d}{dx}(Ce^{ax}) = aCe^{ax} = ay$$

Sin embargo, surge una pregunta: ¿Existen otras soluciones?

3. Demostrar que todas las soluciones son de la **forma**  $y(x) = Ce^{ax}$  con  $C \in \mathbb{R}$ . (Pista: multiplicar por  $e^{-ax}$ )

*Solución 1.3.* Si multiplicamos la ecuación por la función  $e^{-ax}$ :

$$e^{-ax}y' - ae^{-ax}y = 0 \implies \frac{d}{dx}(e^{-ax}y) = 0$$

Por lo tanto,  $e^{-ax}y$  es constante y todas las soluciones son de la forma  $y(x) = Ce^{ax}$ .

La función  $e^{-ax}$  es el **factor integrante** de la ecuación que proporciona un método de resolución que se estudiará más adelante

La siguiente pregunta es: ¿Qué caracteriza esa constante?

4. Encontrar el valor de la función que caracteriza la constante.

*Solución 1.4.* Como en el ejemplo del disparo, se puede tener un punto de la solución como condición de inicio:  $y(0) = y_0$ . Entonces la solución es:

$$y_0 = y(0) = Ce^{a \cdot 0} = C \implies y(x) = y_0 e^{ax}$$

Los resultados obtenidos hasta ahora nos ayudan a intuir que las ecuaciones tienen como solución familias de funciones y que las condiciones que se imponen determinan subconjuntos particulares.

La siguiente pregunta es: ¿Cómo varían las soluciones respecto de  $a$ ?

5. Describir como varían las soluciones respecto al **parámetro  $a$** .

*Solución 1.5.* El comportamiento depende del parámetro  $a$ :

- Si  $a > 0$ , las soluciones  $y(x) = y_0 e^{ax}$  son exponenciales **crecientes**.
- Si  $a < 0$ , las soluciones  $y(x) = y_0 e^{ax}$  son exponenciales **decrecientes**.
- Si  $a = 0$ , las soluciones  $y(x) = y_0$  son **constantes**.

**Nota:** el crecimiento se podía deducir directamente en el primer apartado.

Para estudiar el espacio de soluciones es útil representar todas las soluciones en el plano  $(x, y)$ . Este espacio se denomina plano de fases.

6. Representar todas las soluciones en el **plano de fases**.

*Solución 1.6.* En este caso, las soluciones son curvas exponenciales:

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la página web](#)

En el plano se observa que hay una solución constante  $y = 0$ . Estas soluciones se llaman equilibrios o soluciones estacionarias.

7. Encontrar todos los **equilibrios** o soluciones constantes.

*Solución 1.7.* Soluciones particulares y de interés son las soluciones constantes, llamadas puntos de equilibrio. Una solución es constante  $y(x) = k \in \mathbb{R}$  si y solo si  $y'(x) = 0$ . Por lo tanto las soluciones de:

$$y' = 0 = ay \iff a = 0 \vee y = 0$$

- Si  $a \neq 0$ , el único equilibrio es la función 0.
- Si  $a = 0$ , todas las soluciones son equilibrios.

La **interpretación geométrica** de la derivada es la pendiente de la recta tangente a la solución. Esto quiere decir que en cada punto la ecuación define la tangente a una o varias soluciones.

Esto nos permite dibujar un campo vectorial asociado en el que en cada punto el vector tiene la pendiente definida por la ecuación.

8. Definir el **campo vectorial** asociado a la ecuación diferencial y dibujarlo.

*Solución 1.8.* El campo de direcciones muestra la pendiente  $y' = ay$  en cada punto  $(x, y)$ . Este permitirá visualizar el comportamiento local de las soluciones.

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la página web](#)

Para definir el campo es necesario un vector  $(\alpha, \beta)$  que tenga como pendiente  $ay$ .

Como la pendiente es  $\frac{\beta}{\alpha}$ , el vector más simple es  $(1, ay)$ .

**Interpretación:** Cada flecha indica la dirección y pendiente de la solución en ese punto.

El dibujo se ha hecho numéricamente evaluando en todos los puntos aunque se verán técnicas para poder aproximarlos sin la necesidad de evaluar tantos puntos.

Además se aprecia que si  $a > 0$  las soluciones se alejan del 0 mientras que si es negativo se acercan. Esta propiedad de la solución 0 se estudiará como estabilidad

8. Formalizar la intuición anterior usando la expresión de la solución. ¿Cuándo **convergen las soluciones a 0**?

*Solución 1.9.* Como las soluciones son exponenciales. El límite a infinito converge a 0 si el argumento es negativo y convergen a  $\pm\infty$  si es positivo.

Formalmente se dirá que:

- Para  $a < 0$ , el equilibrio  $y = 0$  es **estable** (las soluciones tienden a cero).
- Para  $a > 0$ , el equilibrio  $y = 0$  es **inestable** (las soluciones se alejan de cero).

En teoría de sistemas dinámicos estos cambios de comportamiento son muy importantes. Un cambio significativo en el comportamiento de las soluciones puede hacer que un modelo deje de ser representativo o un aviso de que el fenómeno modelado cambiará su comportamiento. Estos eventos se denominan **bifurcaciones**.

Además el campo de direcciones permite aproximar numéricamente las soluciones. Si aproximamos la solución en un punto por la tangente a ese punto se obtiene el **método de Euler**.

Para ello, dividimos el espacio en un conjunto de  $N$  puntos equidistantes y de forma iterada aproximamos en cada punto la función por la recta tangente definida por la EDO.

9. Formalizar la intuición anterior y aproximar  $y' = y$  en  $[0, 1]$  donde  $y(0) = 1$ .

*Solución 1.10.* Para aproximar la solución del problema  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$  en el intervalo  $[0, 1]$  mediante el método de Euler, dividimos el intervalo en  $N$  pasos de tamaño  $h = 1/N$ .

Además para aproximar un punto se usa el punto anterior y la recta tangente a definida por la EDO  $y_{n+1} = y_n + hy_n = y_{n-1} + hy_{n-1}$

$$\begin{cases} x_n = nh = \frac{n}{N} \\ y_0 = 1 \\ y_n = y_{n-1} + hy_{n-1} = (1+h)y_{n-1} \end{cases}$$

para  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Por inducción se obtiene la expresión explícita:

$$y_n = (1 + h)^n = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n$$

En particular, para  $x = 1$  ( $n = N$ ):

$$y_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

Comparando con la solución exacta  $y(1) = e^1 = e$ , se observa que  $y_N$  converge a  $e$ .

### La ecuación como modelo

En este caso la ecuación modela dos fenómenos distintos para valores de  $a$  positivos o negativos.

Para valores de  $a$  **positivos**, es modelo muy sencillo para describir el **crecimiento** de una población de bacterias.

El crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias  $y' = ay$  (si se duplica la población la velocidad también duplica).

Pregunta: ¿Qué limitaciones podría tener este modelo?

Para valores negativos, modeliza de crecimiento. Por ejemplo se usa para medir la cantidad de un elemento radioactivo.

El decaimiento nuclear se comporta exactamente como esta ecuación

## 1.2. Notación y clasificación de ecuaciones

### 1.2.1. Notación de derivadas

Existen varias notaciones comunes para expresar derivadas en ecuaciones diferenciales:

**Notación de Lagrange:**

$$y', \quad y'', \quad y'''$$

**Notación de Newton:**

$$\dot{y}, \quad \ddot{y}, \quad \dddot{y}$$

**Notación de Leibniz:**

$$\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^3y}{dt^3}$$

A lo largo del texto se utilizarán principalmente la notación de Lagrange y de Leibniz.

Además a lo largo del libro se usarán distintas letras para la variable independiente ( $t$ ,  $x$ ,  $s$ , etc.) y la función desconocida ( $y$ ,  $u$ ,  $v$ , etc.) dependiendo del contexto.

### 1.2.2. Clasificación de ecuaciones diferenciales

#### Ecuaciones Ordinarias y en Derivadas Parciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según el número de variables independientes:

**Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)** La función desconocida depende de una única variable independiente. Las derivadas son ordinarias.

$$y' = ky, \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

**Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)** La función desconocida depende de dos o más variables independientes. Aparecen derivadas parciales.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 u = 0$$

### Orden

**Definición 1.1** (Orden). El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

La ecuación anterior es de orden  $n$ .

### Ejemplo 1.3.

- $y' = 3y^3$  es de **orden 1**
- $y'' + 2y' + y = 0$  es de **orden 2**
- $y''' - y' = \sin(t)$  es de **orden 3**
- $\frac{d^4 y}{dt^4} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} = t^2$  es de **orden 4**

### Ecuaciones Lineales

**Definición 1.2** (Ecuación lineal). Una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  es **lineal** si puede escribirse en la forma:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

donde  $a_i(t)$  y  $g(t)$  son funciones que dependen solo de  $t$  (no de  $y$  ni sus derivadas).

### Características clave:

- La variable dependiente  $y$  y sus derivadas aparecen de forma lineal (no hay productos, potencias, ni composiciones)
- Si  $g(t) = 0$ , la ecuación es **homogénea**
- Si  $g(t) \neq 0$ , la ecuación es **no homogénea**

### Ejemplo 1.4. Ecuaciones lineales:

- $y' + 2y = e^t$  (lineal de orden 1, no homogénea)
- $y'' - 3y' + 2y = 0$  (lineal de orden 2, homogénea)
- $t^2 y'' + ty' - y = \ln t$  (lineal de orden 2, no homogénea)

### Ecuaciones no lineales:

- $y' = y^2$
- $y'' + (y')^2 + y = 0$
- $y'' + \sin(y) = 0$

### Ecuaciones Autónomas

Una ecuación diferencial ordinaria es **autónoma** si la variable independiente no aparece explícitamente en la ecuación.

**Forma general de una EDO autónoma de orden 1:**

$$y' = f(y)$$

**Forma general de una EDO autónoma de orden 2:**

$$y'' = f(y, y')$$

**Ejemplo 1.5. Ecuaciones autónomas:**

- $y' = ky$
- $y' = y(1 - y)$
- $y'' + \sin(y) = 0$

**Ecuaciones no autónomas:**

- $y' = t + y$
- $y'' + ty' + y = 0$
- $y' = e^t y$

### 1.2.3. Forma estándar y forma normal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  se puede expresar en **forma estándar** o **forma normal**:

**Definición 1.3** (Forma estándar).

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

La ecuación admite **forma normal** (o **forma explícita**) si es posible despejar la derivada de mayor orden:

**Definición 1.4** (Forma Normal).

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

**Ejemplo 1.6.** La ecuación  $y'' + 2y' + y = e^t$  en forma normal es:

$$y'' = e^t - 2y' - y$$

En forma estándar es:

$$y'' - e^t + 2y' + y = 0$$

### 1.3. Soluciones de ecuaciones

**Definición 1.5** (Solución). Una función  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) (derivable tantas veces como lo exija la ecuación) se dice **solución** de una EDO en el intervalo  $I$  si, al sustituir  $y(t)$  y sus derivadas en la ecuación, esta se verifica para todo  $t \in I$ .

En particular, si la EDO está en forma normal

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

entonces  $y$  es solución si cumple

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I.$$

**Nota:** La definición de solución requiere que su dominio sea un intervalo  $I$ . Esto tiene dos implicaciones fundamentales: 1. **Conexión:** No se trabaja en conjuntos no conexos. 2. **Independencia de ramas:** Una solución puede generar múltiples soluciones si su dominio no es conexo. Cada intervalo conexo del dominio define una solución diferente.

#### 1.3.1. Soluciones explícitas e implícitas

Las soluciones se pueden expresar de forma explícita o implícita:

**Definición 1.6** (Solución Explícita). Una solución es **explícita** si se puede escribir como una función de la variable independiente  $y = \phi(t)$ .

**Definición 1.7** (Solución Implícita). Una solución es **implícita** si se expresa mediante una relación  $G(t, y) = 0$  que define a una o varias funciones  $y = \phi(t)$  diferenciables en algún intervalo.

**Ejemplo 1.7.** La ecuación  $y' = -\frac{x}{y}$  tiene como solución **implícita** la ecuación

$$y^2 + x^2 = C \quad C \in \mathbb{R}$$

En forma **explícita**, la solución es

$$y = \pm\sqrt{C - x^2} \quad C \in \mathbb{R}$$

**Nota:** se observa que la solución implícita no es una función, cada solución implícita puede definir varias soluciones explícitas.

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

#### 1.3.2. Comprobar que una función es solución

Para **comprobar que una función es solución** de una EDO, es suficiente con sustituirla en la ecuación y verificar que se cumple.

En los siguientes ejemplos se muestra soluciones de ecuaciones y su comprobación.

**Una función varias soluciones**

La ecuación  $y' = \frac{1}{x^2}$  tiene como familia de soluciones  $y = -\frac{1}{x} + C$  con  $C \in \mathbb{R}$ .

Para comprobar que es solución, se sustituye en la ecuación:

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{x} + C \right) = \frac{1}{x^2}$$

Sin embargo esta función no está definida en  $x = 0$ . Esto quiere decir que la expresión analítica genera **dos soluciones distintas**, una definida en  $(-\infty, 0)$  y otra definida en  $(0, \infty)$ . Se denominan soluciones maximales y son objeto de estudio en cursos más avanzados. Además, son solución también en cualquier subintervalo de sus dominios.

**Implícita**

**Ejemplo 1.8.** Dada la ecuación anterior  $y' = -\frac{x}{y}$ , se comprueba toda función diferenciable  $y$  que satisfaga la ecuación implícita  $y^2 = -x^2 + C$  es solución.

Derivando ambos lados de la ecuación implícita respecto a  $x$ :

$$y^2 = -x^2 + C$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(-x^2 + C)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Por lo tanto, la solución implícita es solución de la ecuación.

**Explícita**

**Ejemplo 1.9.** Dada la ecuación anterior  $y' = -\frac{x}{y}$ , se comprueba que la función explícita  $y = \pm\sqrt{-x^2 + C}$  es solución.

Sustituyendo directamente:

$$\frac{d}{dx} \left( \pm\sqrt{-x^2 + C} \right) = -\frac{x}{\pm\sqrt{-x^2 + C}} = -\frac{x}{y}$$

Por lo tanto, la solución explícita es solución de la ecuación. Además, es importante definir el **intervalo** en el que la función es solución, en este caso es solución en cualquier subintervalo de su dominio  $x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$ . Nótese que la función está definida en el intervalo cerrado  $[-\sqrt{C}, \sqrt{C}]$  pero no es solución en los extremos porque no es diferenciable en esos puntos. Este es un buen ejemplo de como la función **puede ser solución en un intervalo pero no en su frontera**.

De esta reflexión surgirá la necesidad de una teoría que intente extender soluciones a su intervalo maximal de existencia, caracterizar cuando este existe y como se comporta la solución cerca de la frontera.

### Función a tramos

La ecuación diferencial puede estar definida por partes. Veamos como se comporta:

**Ejemplo 1.10.** Sea la EDO

$$y' = \begin{cases} \cos x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Se puede comprobar que  $\sin x$  es solución en el intervalo  $(0, \pi)$  pero no es solución en ningún intervalo que contenga puntos fuera de  $(0, \pi)$ . Habitualmente, se definen las soluciones a tramos intentando que sean continuas, por ejemplo:

$$y(x) = \begin{cases} C_1, & x \leq 0, \\ \sin x + C, & x \in (0, \pi), \\ C_2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Esta familia de soluciones define tres soluciones de la ecuación diferencial definidas respectivamente en  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, \infty)$ . Ya que la derivada en  $\{0, \pi\}$  no está definida. Por ejemplo, el límite por la izquierda en 0 es 0 y por la derecha  $\cos 0 = 1$ .

En función del modelo que represente nuestro problema, puede ser interesante definir la solución a tramos de forma que sea continua o incluso diferenciable. En este caso, se puede imponer solo la continuidad y se obtiene  $C_1 = C$  y  $C_2 = C + \sin \pi = C$ . Por lo tanto, la familia de soluciones continuas es:

$$y(x) = \begin{cases} C, & x \leq 0, \\ \sin x + C, & x \in (0, \pi), \\ C, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Por definición no son solución en los puntos  $\{0, \pi\}$  pero la diferenciabilidad en esos puntos puede no ser necesaria a la hora de estudiar el fenómeno que se está modelizando. En análisis avanzado, este tipo de funciones que cumplen la ecuación en casi todo su dominio se conocen como soluciones en sentido **débil** o soluciones de **Carathéodory**.

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## 1.4. Modelos

Los modelos matemáticos que estudiaremos cumplen tres propiedades fundamentales:

- **Determinismo:** el estado futuro y pasado del sistema está completamente determinado por su estado inicial. No existe ambigüedad: las soluciones determinadas por las condiciones iniciales son únicas.
- **Diferenciabilidad:** las funciones que describen la evolución del sistema son continuas y derivables. Esta hipótesis, nos permitirá garantizar la existencia de soluciones.

- **Finito-dimensionalidad:** el sistema se describe mediante un número finito de variables. Cada estado del sistema puede representarse como un punto en un espacio euclídeo de dimensión  $n$ .

En conjunto, estas tres propiedades definen el marco clásico de las **ecuaciones diferenciales ordinarias deterministas**, que constituyen la base teórica de buena parte de la modelización matemática en ciencias e ingeniería.

## Capítulo 2

# Modelos poblacionales

Los **modelos poblacionales** constituyen una aplicación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Permiten describir y predecir la evolución temporal de poblaciones biológicas, desde bacterias hasta especies animales, pasando por recursos pesqueros o forestales. Este tipo de modelos se encuentran incluso en contextos no biológicos, como el número de artículos publicados, la difusión de innovaciones o el crecimiento de usuarios en una red social.

### 2.0.1. Clasificación de los modelos

Los modelos que estudiaremos se pueden clasificar según su complejidad:

1. **Modelos de crecimiento libre (sin limitaciones):**
  - **Malthus (exponencial):** Crecimiento proporcional al tamaño poblacional
  - **Explosión:** Crecimiento acelerado (cuadrático)
2. **Modelos con saturación (limitaciones ambientales):**
  - **Verhulst (logístico):** Capacidad de carga del medio
  - **Allee Effect:** Umbral mínimo de población viable
3. **Modelos con explotación (gestión de recursos):**
  - **Harvest Quota:** Extracción constante
  - **Relative Harvest:** Extracción proporcional

Estos modelos se desarrollaron de manera constructiva, cada uno mejorando o adaptando al anterior para reflejar fenómenos más realistas:

1. **Malthus:** Punto de partida, modelo más simple, tasa de crecimiento lineal
2. **Explosión:** Incrementa el crecimiento (no lineal)
3. **Verhulst:** Introduce la idea de límite natural
4. **Allee Effect:** Incorpora umbral mínimo de población viable
5. **Harvest Quota:** Aplicación práctica (extracción constante)
6. **Relative Harvest:** Gestión proporcional más realista

Este orden permite **comprender progresivamente** cómo cada modelo corrige o generaliza el anterior, reflejando fenómenos cada vez más realistas.

#### Modelo de Malthus

#### Modelo de crecimiento exponencial

El modelo más simple de crecimiento poblacional fue propuesto por Thomas Malthus en 1798. Supone que la tasa de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la población en cada instante:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde:

- $P(t)$  es la población en el instante  $t$
- $k$  es la constante de proporcionalidad (tasa de crecimiento)
- $k > 0$  indica crecimiento,  $k < 0$  indica decrecimiento

La **solución general** es:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

donde  $P_0$  es la población inicial en  $t = 0$ .

La solución describe un **crecimiento exponencial** si  $k > 0$  o un **decaimiento exponencial** si  $k < 0$ .

El modelo de Malthus representa situaciones donde una población crece sin limitaciones externas, es decir, cuando los recursos son abundantes y no hay competencia, enfermedades ni depredadores. En la vida real, esto solo ocurre durante períodos iniciales o en ambientes controlados.

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la página web](#)

*Solución.*

Separando variables:

$$\frac{dP}{P} = k dt$$

Integrando:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt \implies \ln|P| = kt + C$$

Con  $P(0) = P_0$ :

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

### Modelo de Explosión

#### Modelo de crecimiento cuadrático

Supongamos que la tasa de reproducción es proporcional al **número de parejas** posibles. En una población de tamaño  $P$ , el número de parejas es proporcional a  $P^2$ :

$$\frac{dP}{dt} = kP^2$$

donde  $k > 0$  es la constante de reproducción.

La **solución general** es:

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}$$

**Tiempo de explosión:** La población tiende a infinito cuando  $t \rightarrow t^* = \frac{1}{kP_0}$ .

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

*Solución.* Separando variables:

$$\frac{dP}{P^2} = k dt \implies \int P^{-2} dP = \int k dt$$

$$-\frac{1}{P} = kt + C$$

Con  $P(0) = P_0$ :

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}$$

### Modelo de Verhulst

#### Modelo logístico con capacidad de carga

El modelo de Verhulst (1838) introduce un término de saturación que limita el crecimiento cuando la población se acerca a la **capacidad de carga** del medio:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde:

- $k$  es la tasa de crecimiento intrínseca
- $K$  es la capacidad de carga del medio

La **solución general** es:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-kt}}$$

Esta curva tiene forma de sigmoide y tiende asintóticamente a  $K$ .

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

*Solución.* Separando variables y usando fracciones parciales:

$$\frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt$$

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = k dt$$

Integrando y resolviendo para  $P$ :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-kt}}$$

### Efecto Allee

#### Umbral mínimo de población viable

El **efecto Allee** describe situaciones donde una población pequeña tiene dificultades para crecer. Se requiere una **población mínima**  $A$  para que el crecimiento sea positivo:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \left(\frac{P}{A} - 1\right)$$

donde  $A$  es el umbral de Allee y  $K$  es la capacidad de carga ( $A < K$ ).

#### Puntos de equilibrio:

- $P = 0$  (extinción)
- $P = A$  (umbral crítico, inestable)
- $P = K$  (capacidad, estable)

#### Dinámica:

- Si  $P_0 < A$ : extinción
- Si  $A < P_0 < K$ : crecimiento hacia  $K$

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la página web](#)

*Solución.* La ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \left(\frac{P}{A} - 1\right) = \frac{kP}{KA} (K - P)(P - A)$$

Separando variables:

$$\frac{dP}{P(K - P)(P - A)} = \frac{k}{KA} dt$$

Usando fracciones parciales:

$$\frac{1}{P(K - P)(P - A)} = \frac{1}{A(K - A)P} + \frac{1}{K(K - A)(K - P)} + \frac{1}{AK(P - A)}$$

Integrando y aplicando condiciones iniciales se obtiene una solución implícita compleja. El análisis cualitativo de los puntos de equilibrio es más relevante:

- $P^* = 0$ : estable
- $P^* = A$ : inestable
- $P^* = K$ : estable

### Harvest Quota (Constante)

#### Extracción constante de población

Consideremos una población de Verhulst de la cual extraemos una cantidad **constante**  $c$  por unidad de tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$$

donde  $c$  es la **tasa de cosecha** constante.

### Análisis de equilibrio:

Los equilibrios satisfacen  $kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) = c$ .

Existe cosecha sostenible si  $c \leq c_{max} = \frac{kK}{4}$ .

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la página web](#)

*Solución.* La ecuación diferencial es:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$$

Expandiendo:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{k}{K}P^2 + kP - c$$

Los equilibrios satisfacen:  $kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) = c$ , que es una ecuación cuadrática:

$$P^2 - KP + \frac{cK}{k} = 0$$

Soluciones:

$$P_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - \frac{4cK}{k}}}{2}$$

Para que existan equilibrios reales:  $K^2 \geq \frac{4cK}{k}$ , es decir,  $c \leq c_{max} = \frac{kK}{4}$ .

- Si  $c < c_{max}$ : dos equilibrios,  $P_2$  estable y  $P_1$  inestable
- Si  $c = c_{max}$ : un equilibrio  $P^* = \frac{K}{2}$  (bifurcación)
- Si  $c > c_{max}$ : no hay equilibrios  $\rightarrow$  extinción

### Relative Harvest Quota

#### Extracción proporcional a la población

La cosecha es **proporcional** al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - hP$$

donde  $h$  es la **tasa de cosecha relativa**.

Reescribiendo:  $\frac{dP}{dt} = (k - h)P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$

**Análisis:** - Si  $h < k$ : supervivencia hacia  $K$  - Si  $h \geq k$ : extinción

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

*Solución.* La ecuación diferencial es:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - hP = P \left[ k \left(1 - \frac{P}{K}\right) - h \right]$$

Factorizando:

$$\frac{dP}{dt} = P \left[ k - h - \frac{kP}{K} \right] = P \left[ (k - h) - \frac{k}{K}P \right]$$

Reescribiendo en forma logística:

$$\frac{dP}{dt} = (k - h)P \left[ 1 - \frac{P}{K(1 - h/k)} \right]$$

**Equilibrios:**  $\frac{dP}{dt} = 0 \implies P = 0$  o  $k \left(1 - \frac{P}{K}\right) = h$

Del segundo:  $1 - \frac{P}{K} = \frac{h}{k} \implies P^* = K \left(1 - \frac{h}{k}\right)$

**Caso 1:** Si  $h < k$  (cosecha sostenible)

El equilibrio no trivial es  $P^* = K \left(1 - \frac{h}{k}\right) > 0$  (estable).

La solución es de tipo logístico con capacidad reducida  $K_{eff} = K(1 - h/k)$  y tasa efectiva  $k_{eff} = k - h$ :

$$P(t) = \frac{K(1 - h/k)}{1 + \left(\frac{K(1 - h/k) - P_0}{P_0}\right) e^{-(k-h)t}}$$

con  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K \left(1 - \frac{h}{k}\right)$ .

**Caso 2:** Si  $h = k$

$$P^* = 0 \implies \frac{dP}{dt} = -\frac{kP^2}{K} \implies P(t) \rightarrow 0 \text{ (extinción)}$$

**Caso 3:** Si  $h > k$  (sobrepesca)

No hay equilibrio positivo, solo  $P^* = 0$  que es estable  $\implies P(t) \rightarrow 0$  (extinción).

## Comparación de Modelos

**Análisis comparativo:**

**Comportamiento asintótico:**

- **Malthus:** Crecimiento exponencial sin límite  $\rightarrow P(t) \rightarrow \infty$
- **Explosión:** Crecimiento superexponencial  $\rightarrow$  explosión en tiempo finito
- **Verhulst:** Saturación logística  $\rightarrow P(t) \rightarrow K$
- **Allee:** Comportamiento bistable  $\rightarrow$  extinción o supervivencia según  $P_0$  vs  $A$
- **Harvest Quota:** Equilibrio reducido o extinción según  $c$  vs  $c_{max}$
- **Relative Harvest:** Saturación en  $K$  con tasa efectiva  $(k - h)$

**Tasas de crecimiento:**

En  $t$  pequeño: - Explosión crece más rápido (cuadrático) - Malthus y Verhulst similares inicialmente - Allee crece más lento si  $P_0$  cercano a  $A$  - Harvest models dependen de intensidad de extracción

En  $t$  grande: - Malthus diverge exponencialmente - Verhulst, Allee y Relative Harvest saturan (en  $K$  o valores menores) - Harvest Quota alcanza equilibrio estable o extinción - Explosión ya ha explotado

**Efectos de la explotación:**

- **Harvest Quota:** Reduce capacidad efectiva, riesgo de colapso si  $c > c_{max}$
- **Relative Harvest:** Reduce tasa de crecimiento pero mantiene forma logística

**Aplicabilidad:**

Modelo	Escenario	Ejemplo	Ecuación diferencial
<b>Malthus</b>	Crecimiento exponencial sin límites	Crecimiento bacteriano inicial (etapa temprana)	$\frac{dP}{dt} = kP$
<b>Ex- plosión</b>	Crecimiento cuadrático (más rápido que Malthus)	Reacciones en cadena, difusión sin freno	$\frac{dP}{dt} = kP^2$
<b>Ver- hulst</b>	Crecimiento limitado por capacidad del entorno (logístico)	Poblaciones animales con recursos limitados	$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$
<b>Allee</b>	Crecimiento logístico + umbral de población mínima	Especies sociales con dificultad de reproducción	$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(\frac{P}{A} - 1\right)$
<b>Harvest Quota</b>	Crecimiento logístico con extracción constante	Pesca/caza con cuotas fijas	$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$
<b>Rela- tive Harvest</b>	Crecimiento logístico con extracción proporcional	Gestión pesquera proporcional al stock	$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - hP$

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## Capítulo 3

# Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

Un **sistema masa-resorte-amortiguador** es uno de los modelos físicos más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales. Describe el movimiento de una masa sujeta a un resorte con fricción, y aparece en aplicaciones que van desde suspensiones de vehículos hasta sistemas de control y circuitos eléctricos.

### 3.1. Modelo matemático

Consideremos una masa  $m$  unida a un resorte con constante elástica  $k$ , sometida a una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad con coeficiente  $c$ .

Por la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

donde:

- $x(t)$  es la posición de la masa (desplazamiento desde el equilibrio)
- $m$  es la masa del objeto
- $c$  es el coeficiente de amortiguamiento
- $k$  es la constante del resorte

Dividiendo por  $m$  y definiendo:

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (frecuencia natural)
- $\gamma = \frac{c}{2m}$  (coeficiente de amortiguamiento)

Obtenemos la **forma canónica**:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

### 3.2. Clasificación según el amortiguamiento

El comportamiento del sistema depende del **discriminante reducido** de la ecuación característica  $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$  (es decir,  $\Delta_{quad}/4$ ):

$$\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$$

Esto nos da cuatro regímenes distintos:

### 3.2.1. 1. Sobreamortiguado ( $\gamma > \omega_0$ )

Amortiguamiento **excesivo**. El sistema retorna al equilibrio **sin oscilar**.

**Raíces reales distintas:**

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

**Solución general:**

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

**Características:**

- Decaimiento exponencial sin oscilaciones
- Retorno lento al equilibrio
- Aplicación: Puertas con cierre automático

### 3.2.2. 2. Críticamente amortiguado ( $\gamma = \omega_0$ )

Amortiguamiento **crítico**. El sistema retorna al equilibrio lo más **rápido posible sin oscilar**.

**Raíz doble:**

$$r = -\gamma$$

**Solución general:**

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$$

**Características:**

- Retorno más rápido al equilibrio sin oscilación
- Caso límite entre oscilatorio y no oscilatorio
- Aplicación: Instrumentos de control, servomecanismos de precisión

### 3.2.3. 3. Subamortiguado ( $\gamma < \omega_0$ )

Amortiguamiento **insuficiente**. El sistema **oscila** con amplitud decreciente.

**Raíces complejas conjugadas:**

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_d, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

donde  $\omega_d$  es la **frecuencia amortiguada**.

**Solución general:**

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t))$$

o equivalentemente:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

donde  $A$  es la amplitud de la oscilación y  $\phi$  es la fase.

**Características:**

- Oscilaciones con amplitud decreciente exponencialmente
- Periodo:  $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$
- Aplicación: Instrumentos de medida, relojes mecánicos

### 3.2.4. 4. Sin amortiguamiento ( $\gamma = 0$ )

Caso ideal sin fricción. El sistema **oscila indefinidamente**.

**Raíces imaginarias puras:**

$$r_{1,2} = \pm i\omega_0$$

**Solución general:**

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t - \phi)$$

**Características:**

- Oscilación armónica simple sin decaimiento
- Amplitud constante
- Aplicación: Modelo teórico, péndulo ideal

## 3.3. Visualización interactiva

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## 3.4. Comparación de regímenes

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## 3.5. Aplicaciones prácticas

Régimen	Aplicación	Objetivo	Ejemplo
<b>Sin amortiguamiento</b>	Sistemas ideales	Oscilación perfecta	Péndulo en el vacío, relojes de péndulo
<b>Subamortiguado</b>	Instrumentación	Lectura rápida con pocas oscilaciones	Sismógrafos, suspensiones de vehículos
<b>Críticamente amortiguado</b>	Control óptimo	Retorno rápido sin oscilación	Instrumentos de aguja, servomecanismos
<b>Sobreamortiguado</b>	Seguridad	Evitar oscilaciones completamente	Puertas con cierre automático, sistemas de seguridad

### 3.6. Animación

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## Capítulo 4

# Sistemas de ecuaciones

### 4.1. Introducción

En este capítulo se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En particular, se centra en sistemas que cumplen las siguientes propiedades:

1. Cada ecuación puede expresarse en forma normal.
2. El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

Además, se demostrará que ecuaciones de grado superior se pueden reducir a ecuaciones de orden uno. Los casos más generales quedan fuera del ámbito de estos apuntes. Un sistema de este tipo se expresa en la forma:

**Definición 4.1** (Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden). Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

donde  $f_1, \dots, f_n : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones dadas,  $y_1, \dots, y_n$  son las incógnitas y  $I \subseteq \mathbb{R}$  es el intervalo de la variable independiente  $x$ .

#### 4.1.1. Soluciones

Las soluciones de este sistema serán funciones vectoriales donde cada coordenada es solución de la correspondiente ecuación diferencial.

**Definición 4.2** (Solución de un sistema). Sea  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$  definida en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  y con valores reales, es solución si

$$y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))A$$

para todo  $x \in I$  y  $i = 1, \dots, n$ .

**Ejemplo 4.1.** Si  $y_1(x) = y_2(x) = e^{3x}$ , la función  $(y_1, y_2)$  es una solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2, \end{cases}$$

*Solución.* Es fácil comprobar que es solución ya que:

$$y_1' = 3e^{3x} = 4y_1 - y_2, \quad y_2' = 3e^{3x} = y_1 + 2y_2.$$

#### 4.1.2. Conversión de orden superior a sistema de primer orden

Toda ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  se puede reducir a un sistema equivalente de  $n$  ecuaciones de primer orden.

**Proposición 4.1** (Reducción de orden superior a sistema de primer orden). *Cualquier ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  se puede reducir a un sistema equivalente de  $n$  ecuaciones de primer orden.*

Para ello, es suficiente definir las variables

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}, \quad (4.1)$$

la función vectorial  $(y_1, \dots, y_n)$  es una solución del sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (4.2)$$

**Ejemplo 4.2.** Consideremos la ecuación diferencial de tercer orden:

$$y''' - 2y'' + y' - 3y = \sin(x)$$

*Solución.* Para convertirla a un sistema de primer orden, definimos:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''$$

Derivando cada variable:

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2 \\ y_2' &= y'' = y_3 \\ y_3' &= y''' = 2y'' - y' + 3y + \sin(x) = 2y_3 - y_2 + 3y_1 + \sin(x) \end{aligned}$$

El sistema equivalente de **3 ecuaciones de primer orden** es:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_1 - y_2 + 2y_3 + \sin(x) \end{cases}$$

**Nota:** La reducción permite convertir un sistema de ecuaciones de grado  $n$  en un sistema de ecuaciones de grado 1.

**Ejemplo 4.3.** Consideremos el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ x'' + y = 0 \end{cases}$$

*Solución.* Se definen nuevas variables para las derivadas:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad x_1 = x, \quad x_2 = x'$$

Entonces:

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2 \\ y_2' &= y'' = -x = -x_1 \\ x_1' &= x' = x_2 \\ x_2' &= x'' = -y = -y_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema equivalente de **4 ecuaciones de primer orden** es:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -y_1 \end{cases}$$

## 4.2. Sistemas Lineales de dimensión $n$

Un sistema lineal es el sistema formado por ecuaciones lineales:

**Definición 4.3** (Sistema lineal). Un **sistema de ecuaciones lineales de primer orden** es aquel en el que las funciones  $f_1, \dots, f_n$  son lineales en las variables  $y_1, \dots, y_n$ . La forma general de estos sistemas es:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (4.3)$$

donde las funciones  $a_{ij}$  y  $b_i$ , con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , son funciones continuas en un cierto intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Además, si  $b_1 = b_2 = \cdots = b_n \equiv 0$ , el sistema se dice que es **homogéneo**; en caso contrario se dice que es **no homogéneo**.

#### 4.2.1. Forma matricial

El sistema anterior puede expresarse de manera compacta mediante notación matricial. En esta forma, el sistema se escribe como:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Identificando la función vectorial  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$  con el vector columna correspondiente, la expresión anterior se reduce a la forma compacta:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{A}(x)$  es la matriz  $n \times n$  de coeficientes

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y  $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$  es el vector de términos no homogéneos.

#### 4.2.2. Conversión de sistema a ecuación de orden superior

Algunos sistemas lineales se pueden convertir en una ecuación de orden superior, lo que proporciona un método alternativo de resolución aprovechando las técnicas ya estudiadas para ecuaciones de orden superior. Este método se llama método de eliminación.

Por ejemplo, dado un sistema lineal con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases}$$

Derivando sucesivamente la primera ecuación y sustituyendo las demás ecuaciones del sistema, se puede eliminar las variables  $y_2, \dots, y_n$  y obtener una ecuación diferencial de orden  $n$  en la variable  $y_1$ . Una vez resuelta esta ecuación, las demás variables se recuperan por derivación y sustitución.

**Ejemplo 4.4.** Convertir el siguiente sistema lineal a una ecuación de orden superior:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 \end{cases}$$

*Solución.* De la primera ecuación:  $y_2 = y_1'$

Derivando:  $y_2' = y_1''$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$y_1'' = -y_1$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes:

$$y_1'' + y_1 = 0$$

cuya solución general es:

$$y_1(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Y por tanto:

$$y_2(x) = y_1'(x) = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

**Ejemplo 4.5.** Convertir el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones en una ecuación diferencial de orden superior:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = -x. \end{cases}$$

*Solución.* De la primera ecuación, se tiene:

$$y = x'.$$

Derivando y sustituyendo en la segunda:

$$z = y' = x''.$$

Derivando otra vez y sustituyendo en la tercera:

$$x''' = -x.$$

Por tanto, el sistema es equivalente a la ecuación diferencial de orden 3:

$$x''' + x = 0.$$

### 4.3. Estructura del conjunto de soluciones

Al igual que en el caso de las ecuaciones de orden superior, en esta sección se analiza la estructura del conjunto de soluciones de los sistemas lineales, tanto homogéneos como no homogéneos.

#### 4.3.1. Sistemas homogéneos

La estructura de las soluciones de un sistema lineal homogéneo de dimensión  $\mathbf{n}$  es un espacio vectorial de dimensión  $\mathbf{n}$ . Para describir completamente un espacio vectorial es suficiente una base que es un conjunto de cardinal mínimo cuyas combinaciones lineales forman el espacio.

Esta sección presenta los siguientes resultados principales:

1. La estructura del espacio de soluciones es **espacio vectorial (Principio de superposición)**.
2. Criterio necesario y suficiente de **dependencia lineal (Criterio del Wronskiano)**.
3. La **dimensión del espacio** es igual a la dimensión del sistema.

Gracias a estos tres resultados se podrá encontrar una base del espacio y garantizar de que se han hallado todas las soluciones posibles.

#### Principio de superposición

El **principio de superposición** garantiza que el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo es cerrado bajo combinaciones lineales. Esto implica que las soluciones forman un **espacio vectorial**: cualquier combinación lineal de soluciones es también solución. En consecuencia, el conjunto de soluciones constituye un **subespacio vectorial de**  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ , el espacio de las funciones de clase  $C^1$  definidas en  $I \subset \mathbb{R}$  y con valores en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.1** (Principio de superposición). *Si  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  son soluciones del sistema lineal homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.6}$$

*en un intervalo  $I$  y  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ , entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_m \mathbf{y}_m$$

también es una solución del sistema en  $I$ .

*Demostración.* El resultado es consecuencia de la linealidad de la derivada. Sea

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{y}_i(x),$$

entonces

$$\mathbf{y}'(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{y}'_i(x).$$

Como  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  son soluciones del sistema homogéneo

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y},$$

se cumple

$$\mathbf{y}'_i(x) = A(x) \mathbf{y}_i(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Por tanto,

$$\mathbf{y}'(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{y}'_i(x) = \sum_{i=1}^m c_i A(x) \mathbf{y}_i(x) = A(x) \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{y}_i(x) = A(x) \mathbf{y}(x).$$

Así,  $\mathbf{y}$  satisface el sistema y es también solución en  $I$ . □

### Criterio necesario y suficiente de dependencia lineal para soluciones

Para encontrar una base, es fundamental disponer de un criterio que permita determinar si un conjunto de soluciones es linealmente independiente. En el caso de sistemas lineales homogéneos, existe un criterio algebraico sencillo basado en el **wronskiano**: un determinante construido a partir de las funciones solución. Este criterio establece una equivalencia completa entre la independencia lineal de las soluciones y la no anulación del wronskiano, proporcionando así una herramienta práctica y verificable para identificar conjuntos fundamentales de soluciones.

### Dependencia e independencia lineal

**Definición 4.4** (Dependencia lineal). Un conjunto de funciones vectoriales  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  se dice que es **linealmente dependiente** en un intervalo  $I$  si existen constantes reales  $c_1, \dots, c_n$ , no todas nulas, tales que

$$c_1 \mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

para todo  $x \in I$ . Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

### Wronskiano

**Definición 4.5.** Dadas  $n$  funciones vectoriales  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ ,

$$\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{nj}), \quad j = 1, \dots, n,$$

se define el **wronskiano** de  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  como el determinante

$$W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] = \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

### Wronskiano y dependencia lineal

La relación más sencilla entre dependencia lineal y el wronskiano es que soluciones linealmente dependientes entonces el Wronskiano se anula en todo el intervalo.

**Proposición 4.2** (Wronskiano y dependencia lineal). *Sean  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  funciones vectoriales derivables en un intervalo  $I$  entonces:*

$$\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \text{ son linealmente dependientes} \Rightarrow W(x) \equiv 0$$

*Demostración.* Como son linealmente dependiente, existe  $c = (c_1, \dots, c_n)^T \neq \mathbf{0}$  tal que

$$c_1 \mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } x \in I.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{y}_1(x) = - \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{c_1} \mathbf{y}_i(x)$$

Además, los determinantes son invariantes ante sumas de columnas:

$$0 = W[\mathbf{0}, c_2 \mathbf{y}_2, \dots, c_n \mathbf{y}_n] = W[c_1 \mathbf{y}_1 + \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{c_1} \mathbf{y}_i(x), \dots, c_n \mathbf{y}_n] = W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \equiv 0$$

□

### Teorema de Abel

**Teorema 4.2** (Teorema de Abel). *Si  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  son soluciones del sistema lineal homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.8}$$

*en un intervalo  $I$ , entonces el wronskiano  $W(x) = W[\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}]$  o bien es idénticamente nulo o bien nunca se anula en dicho intervalo.*

*Demostración.* La regla de Jacobi permite evaluar la derivada del determinante:

$$\frac{d}{dx} \det(X) = \det(X) \operatorname{tr}(X'(x) X(x)^{-1}).$$

Sea  $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$  la matriz de coeficientes del sistema y sea  $Y$  la matriz formada por las soluciones  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  entonces:

$$\frac{dW}{dx} = W \operatorname{tr}(X'(x) X(x)^{-1}) = W \operatorname{tr}(A X(x) X(x)^{-1}) = W \operatorname{tr}(A) \quad (4.9)$$

Definiendo  $p(x) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}(x))$ , la ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dW}{dx} = p(x)W$$

cuya solución general es

$$W(x) = c \exp\left(\int p(x) dx\right) = c \exp\left(\int \operatorname{tr}(\mathbf{A}(x)) dx\right) \quad (4.10)$$

donde  $c$  es una constante.

Esta ecuación conocida como **fórmula de Abel** demuestra que el wronskiano o bien es idénticamente nulo o bien nunca se anula en el intervalo.  $\square$

**Corolario 4.1** (Criterio del Wronskiano para dependencia e independencia lineal). *Si  $y_1, \dots, y_n$  son soluciones de la misma ecuación diferencial lineal homogénea entonces:*

$$W(x_0) \neq 0 \iff \text{linealmente independientes en todo } I,$$

$$W(x_0) = 0 \iff \text{linealmente dependientes en todo } I.$$

*Demostración.* La demostración se basa en el Teorema de Abel Teorema 4.2 y en un paso adicional que garantiza que  $W \equiv 0 \Rightarrow$  dependencia lineal global, ya que por unicidad de soluciones los coeficientes de combinación deben ser constantes.

Por el Teorema de Abel, si  $y_1, \dots, y_n$  son soluciones del sistema lineal homogéneo, entonces  $W(x)$  o bien es idénticamente nulo o bien nunca se anula. Por tanto:

- Si  $W(x_0) \neq 0$  en algún punto  $x_0 \in I$ , entonces  $W(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , lo que implica que las funciones son linealmente independientes en todo el intervalo.
- Si  $W(x_0) = 0$  en algún punto  $x_0 \in I$ , entonces  $W(x) \equiv 0$  para todo  $x \in I$ , lo que implica que las funciones son linealmente dependientes en ese punto. En consecuencia, existen constantes  $c_1, \dots, c_n$ , no todas nulas, tales que:

$$\mathbf{z}(x_0) = c_1 \mathbf{y}_1(x_0) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}$$

Por el principio de superposición,  $z(x)$  también es solución del sistema homogéneo. Dado que  $z(x_0) = 0$ , por el teorema de unicidad de soluciones debe cumplirse  $z(x) \equiv 0$  en todo  $I$ . Por lo tanto, las funciones  $y_1, \dots, y_n$  son linealmente dependientes en todo el dominio.  $\square$

**Teorema 4.3** (Existencia de un sistema fundamental de soluciones (matriz identidad como base)). *Existen  $n$  soluciones linealmente independientes (una por cada condición inicial base), por tanto, el espacio de soluciones tiene dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Para demostrar la existencia de  $n$  soluciones linealmente independientes, se construye un conjunto de soluciones particulares mediante condiciones iniciales específicas.

Sea  $x_0 \in I$  un punto fijo. Para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , se considera el problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{e}_j \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{e}_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas lineales, cada uno de estos problemas de valor inicial tiene una única solución  $\mathbf{y}^{(j)}(x)$  definida en todo el intervalo  $I$ .

Ahora evaluamos el wronskiano de estas soluciones en el punto  $x_0$ :

$$W[\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}](x_0) = \det(\mathbf{y}^{(1)}(x_0) \ \dots \ \mathbf{y}^{(n)}(x_0)) = \det(\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_n) = \det(\mathbf{I}_n) = 1 \neq 0.$$

donde  $\mathbf{I}_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

Dado que  $W(x_0) = 1 \neq 0$ , por el Criterio del Wronskiano (Corolario 4.1), las soluciones  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  son linealmente independientes en todo el intervalo  $I$ .

Por lo tanto, hemos construido un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo, lo que demuestra que el espacio de soluciones tiene dimensión  $n$ .  $\square$

### 4.3.2. Sistemas no homogéneos

En el caso no homogéneo, el conjunto de soluciones constituye un espacio afín asociado al espacio vectorial de soluciones del sistema homogéneo. De forma intuitiva, este espacio afín puede verse como el resultado de trasladar el subespacio de soluciones homogéneas de modo que una solución particular  $\mathbf{y}_p$  pasa a desempeñar el papel de origen.

#### Estructura de espacio afín

**Teorema 4.4** (Estructura de la solución general). *Si  $\mathbf{y}_p$  es una solución particular del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \quad (4.12)$$

*en un intervalo  $I$  y  $\mathbf{y}_h$  es una solución del sistema lineal homogéneo asociado*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y},$$

*entonces*

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p \quad (4.13)$$

es también una solución de del sistema no homogéneo en  $I$ .

**Corolario 4.2** (Solución general del sistema no homogéneo). *Si  $\mathbf{y}_p$  es una solución particular del sistema lineal no homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

en un intervalo  $I$  y  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  es un conjunto fundamental de soluciones, en el mismo intervalo, del sistema lineal homogéneo asociado, entonces la solución general del sistema en  $I$  es

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p, \quad (4.14)$$

donde  $c_1, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

### Relación entre espacios afines asociados

Las soluciones de sistemas con distintos términos no homogéneos forman espacios afines paralelos. Sumar sus soluciones particulares equivale a describir cómo estos espacios se desplazan unos respecto a otros. Por lo tanto, la combinación lineal de soluciones particulares define una correspondencia afín entre los respectivos conjuntos de soluciones.

**Teorema 4.5** (Principio de superposición para sistemas no homogéneos). *Si para cada  $i = 1, 2, \dots, m$  la función  $\mathbf{y}_i$  es una solución del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}_i(x)$$

en un intervalo  $I$ , entonces la combinación lineal

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_m\mathbf{y}_m,$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_m$  son constantes reales arbitrarias, es una solución del sistema lineal

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + c_1\mathbf{b}_1(x) + \dots + c_m\mathbf{b}_m(x)$$

en el intervalo  $I$ .

## 4.4. Matriz fundamental de soluciones

En la sección anterior se ha demostrado que el conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo de orden  $n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Una base de dicho espacio vectorial se denomina **conjunto fundamental de soluciones**. La matriz formada por los vectores solución como columnas es de utilidad para resolver y demostrar propiedades de sistemas.

**Definición 4.6** (Matriz fundamental de soluciones). Una matriz  $\Phi$  es **matriz fundamental** del sistema

lineal homogéneo de orden  $n$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \quad (4.15)$$

en un intervalo  $I$ , si sus columnas constituyen un conjunto fundamental de soluciones del sistema en dicho intervalo.

### Caracterización de la matriz fundamental

Si  $\Phi$  es una matriz cuadrada de columnas  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ , entonces

$$\det(\Phi) = W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$$

Por lo tanto se pueden aplicar los resultados del Wronskiano para caracterizar la matriz fundamental.

**Teorema 4.6** (Caracterización de matriz fundamental). *Sea  $\Phi$  una matriz cuadrada cuyas columnas son soluciones del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \quad (4.16)$$

en un intervalo  $I$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La matriz  $\Phi$  es una matriz fundamental del sistema en  $I$ .
2. Existe un  $x_0 \in I$  tal que  $\det(\Phi(x_0)) \neq 0$ .
3.  $\det(\Phi(x))$  no se anula en  $I$ .

*Demostración.* Se demuestra la equivalencia demostrando un sentido de la implicación de manera circular 1.  $\Rightarrow$  2.  $\Rightarrow$  3.  $\Rightarrow$  1.

1.  $\Rightarrow$  2.: Si  $\Phi$  es una matriz fundamental, sus columnas forman un conjunto fundamental de soluciones, por lo que son linealmente independientes. Por el Criterio del Wronskiano (Corolario 4.1), existe  $x_0 \in I$  tal que  $W(x_0) = \det(\Phi(x_0)) \neq 0$ .

2.  $\Rightarrow$  3.: Por el Teorema de Abel (Teorema 4.2), si el wronskiano es no nulo en un punto, entonces no se anula en todo el intervalo.

3.  $\Rightarrow$  1.: Si  $\det(\Phi)$  no se anula en  $I$ , entonces  $W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \neq 0$  en todo  $I$ . Por el Criterio del Wronskiano (Corolario 4.1), las columnas de  $\Phi$  son linealmente independientes y, por tanto, forman un conjunto fundamental de soluciones.  $\square$

### Relación entre matrices fundamentales

Dado que un conjunto fundamental de soluciones es una base del espacio de soluciones, es natural suponer que cualquier otra colección de soluciones se describa mediante un cambio de base. El siguiente resultado formaliza esta correspondencia.

**Proposición 4.3** (Relación entre matrices fundamentales). *Sea  $\Phi$  una matriz fundamental del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}.$$

1. Si  $\mathbf{C}$  es una matriz constante de determinante no nulo entonces la matriz  $\Phi\mathbf{C}$  es también una matriz fundamental del sistema.
2. Si  $\Psi$  es otra matriz fundamental del sistema entonces existe una matriz constante  $\mathbf{C}$ , con determinante no nulo, tal que  $\Psi = \Phi\mathbf{C}$ .

*Demostración.* Demostración de 1.

Sea  $\Phi$  una matriz fundamental de soluciones cuyas columnas  $\tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_n$  son soluciones. Sea  $\mathbf{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^t$  el vector columna  $j$ -ésimo de la matriz  $\mathbf{C}$  entonces

$$\mathbf{y}_j(x) := \Phi(x)\mathbf{c}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \tilde{\mathbf{y}}_i(x)$$

es solución del sistema por ser combinación lineal de soluciones.

Por lo tanto, si  $\mathbf{C}$  es la matriz de columnas los vectores  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  las columnas de la matriz  $\Phi(x)\mathbf{C}$  son soluciones del sistema:

$$\Phi(x)\mathbf{C} = \left( \sum_{i=1}^n c_{i1} \tilde{\mathbf{y}}_i(x) \quad \sum_{i=1}^n c_{i2} \tilde{\mathbf{y}}_i(x) \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n c_{in} \tilde{\mathbf{y}}_i(x) \right) = (\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)).$$

Además las columnas son linealmente independientes. Por el teorema de caracterización de matrices fundamentales (Teorema 4.6) Dado  $\det(\Phi(x)) \neq 0$  (Teorema 4.6). Por tanto, aplicando la propiedad del producto de determinantes

$$\det(\Phi(x)\mathbf{C}) = \det(\Phi(x)) \cdot \det(\mathbf{C}) \neq 0$$

Esto demuestra que  $\Phi\mathbf{C}$  es matriz fundamental.

Demostración de 2.:

Sea  $\Psi$  otra matriz fundamental del sistema. Como ambas  $\Phi$  y  $\Psi$  son matrices fundamentales, sus columnas forman conjuntos fundamentales de soluciones del sistema homogéneo. Por tanto, las columnas de  $\Psi$  se pueden expresar como combinación lineal de las columnas de  $\Phi$ .

Sea  $\mathbf{c}_j$  la  $j$ -ésima columna de  $\Psi$ . Como las columnas de  $\Phi$  forman una base del espacio de soluciones, existen constantes  $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}$  tales que

$$\mathbf{c}_j(x) = c_{1j}\tilde{\mathbf{y}}_1(x) + c_{2j}\tilde{\mathbf{y}}_2(x) + \cdots + c_{nj}\tilde{\mathbf{y}}_n(x) = \Phi(x)\mathbf{c}_j,$$

donde  $\mathbf{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$ .

Definiendo  $\mathbf{C}$  como la matriz cuyas columnas son los vectores  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ , se tiene que

$$\Psi(x) = \Phi(x)\mathbf{C}.$$

Además, como ambas  $\Phi$  y  $\Psi$  son matrices fundamentales, sus determinantes no se anulan. Aplicando la propiedad del producto de determinantes:

$$\det(\Psi(x)) = \det(\Phi(x)) \cdot \det(\mathbf{C}).$$

Como  $\det(\Psi(x)) \neq 0$  y  $\det(\Phi(x)) \neq 0$ , se deduce que  $\det(\mathbf{C}) \neq 0$ .

Finalmente, la matriz  $\mathbf{C}$  es constante porque los coeficientes  $c_{ij}$  de la combinación lineal son constantes.  $\square$

La matriz fundamental proporciona una expresión explícita para la solución de un problema de valores iniciales.

**Corolario 4.3** (Solución de problema de valor inicia). *Sea  $\Phi$  una matriz fundamental del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

la solución del sistema es:

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x)[\Phi(x_0)]^{-1}\mathbf{y}_0. \quad (4.17)$$

*Demostración.* Como  $\Phi$  es una matriz fundamental, sus columnas forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo. Por tanto, la solución general del sistema se puede expresar como

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x)\mathbf{c}$$

para algún vector constante  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .

Imponiendo la condición inicial  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ , se tiene

$$\mathbf{y}_0 = \Phi(x_0)\mathbf{c}.$$

Como  $\Phi$  es una matriz fundamental,  $\det(\Phi(x_0)) \neq 0$ , por lo que la matriz  $\Phi(x_0)$  es invertible. Despejando  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = [\Phi(x_0)]^{-1}\mathbf{y}_0.$$

Sustituyendo en la expresión de la solución general:

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x)[\Phi(x_0)]^{-1}\mathbf{y}_0.$$

$\square$

## 4.5. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Al igual que en las ecuaciones lineales de orden superior, interesa el estudio de los sistemas lineales con coeficientes constantes. El homogéneo se resuelve hallando soluciones exponenciales y, en el no homogéneo, se obtiene una solución particular mediante el método de variación de las constantes o el de coeficientes indeterminados.

### 4.5.1. Sistemas homogéneo

Las soluciones del sistema homogéneo se construyen a partir de términos exponenciales  $e^{\lambda x}$ . En esta sección se presenta su procedimiento de obtención y se introduce la formulación mediante la exponencial matricial  $e^{xA}$ . Aunque esta última es la generalización de la primera, se describen las dos para clarificar el origen de las fórmulas y reforzar la intuición.

#### Método de autovalores

Sea el sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

se buscan soluciones de la forma  $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \mathbf{v}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  constante. Esta suposición reduce el problema diferencial a un problema algebraico parecido a la diagonalización de matrices.

**Proposición 4.4** (Solución exponencial y autovalores). *Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una función de la forma  $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \mathbf{v}$ , con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , es solución del sistema homogéneo*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

si y sólo si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  y  $\mathbf{v}$  un autovector asociado, esto es

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

*Demostración.* Si  $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \mathbf{v}$ , entonces  $\mathbf{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x} \mathbf{v}$ . Sustituyendo en el sistema se obtiene

$$\lambda e^{\lambda x} \mathbf{v} = A(e^{\lambda x} \mathbf{v}),$$

dividiendo ambos miembros por  $e^{\lambda x} \neq 0$ , se obtiene  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . □

En lo que sigue se examinan los diferentes casos que pueden aparecer según la naturaleza de los autovalores. En particular hay tres casos:

1. El número de autovectores coincide con la dimensión del sistema
2. El número de autovalores **no** coincide con la dimensión de la matriz
3. Los autovalores son complejos

#### Número de autovectores coincide con la dimensión del sistema ( $n$ )

El caso más sencillo, si hay  $n$  autovectores distintos estos formarán el conjunto fundamental de soluciones  $e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \mathbf{v}_n$ . Si los autovalores son distintos entonces siempre se cumple. Si hay algún vector  $\lambda_i$  con multiplicidad algebraica mayor que uno, dependerá de la multiplicidad geométrica que es por definición la dimensión del subespacio propio. Si las dos coinciden, también se cumple este caso.

**Teorema 4.7** (Soluciones para autovalores con multiplicidad algebraica igual a la geométrica). *Si la matriz  $A$  tiene  $n$  autovalores reales y  $n$  autovectores correspondientes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , y  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , entonces las funciones*

$$e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \mathbf{v}_n$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

*Demostración.* Se ha visto en la proposición anterior (Proposición 4.4) que cada función  $e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$  es solución del sistema. Para comprobar que son linealmente independientes, basta encontrar un punto en el que el determinante de la matriz formada por dichas soluciones no se anule (Teorema 4.6).

Evaluando la matriz

$$\Phi(x) = (e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad e^{\lambda_n x} \mathbf{v}_n)$$

en  $x = 0$  se obtiene

$$\Phi(0) = (\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n).$$

Como los autovectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  son linealmente independientes, el determinante de  $\Phi(0)$  es no nulo. Por el criterio citado, las funciones  $e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$  son linealmente independientes y forman un conjunto fundamental de soluciones.  $\square$

**Ejemplo 4.6.** Resolver el sistema homogéneo por el método de autovalores:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

*Solución.* El polinomio característico es

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

luego los autovalores son  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = -1$ .

Para  $\lambda_1 = 3$  se tiene

$$(A - 3I) \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = -1$  se tiene

$$(A + I) \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, un conjunto fundamental de soluciones es

$$\mathbf{y}^{(1)}(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

y la solución general del sistema

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 4.7.** Resolver el sistema homogéneo por el método de autovalores:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

*Solución.* El polinomio característico es

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -4 & 0 \\ 6 & \lambda + 1 & 0 \\ -6 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la tercera columna:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -4 \\ 6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)[(\lambda - 9)(\lambda + 1) + 24] = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 5) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5) \end{aligned}$$

Los autovalores son  $\lambda_1 = 3$  (con multiplicidad 2) y  $\lambda_2 = 5$ .

Para  $\lambda_1 = 3$ :

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

La dimensión del núcleo de esta matriz es dos. La multiplicidad geométrica es igual a la algebraica por tanto, podemos coger dos autovectores, por ejemplo:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = 5$ :

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un conjunto fundamental de soluciones es

$$\mathbf{y}^{(1)}(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(3)}(x) = e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la solución general del sistema es

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

### Número de autovectores NO coincide con la dimensión del sistema ( $n$ )

En este caso, nos faltan soluciones linealmente independientes para formar el conjunto fundamental de soluciones. En particular  $j$ , la diferencia entre la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica. Por analogía con ecuaciones lineales de orden superior, es natural buscar soluciones de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x + \dots + \mathbf{a}_{j-1} x^{j-1} + \mathbf{a}_j x^j),$$

**Teorema 4.8** (Soluciones para autovalores con multiplicidad algebraica mayor que la geométrica). *Sea  $\lambda$  un autovalor de  $A$  con multiplicidad algebraica  $m$  y multiplicidad geométrica  $d < m$ . Entonces existen  $m$  soluciones linealmente independientes asociadas a  $\lambda$  de la forma*

$$\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda x}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x + \dots + \mathbf{a}_{j-1} x^{j-1} + \mathbf{a}_j x^j), \quad (4.18)$$

para  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , donde los vectores constantes  $\mathbf{a}_k$  satisfacen el sistema

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{a}_{k-1} = k\mathbf{a}_k, & k = 1, 2, \dots, j; \\ (A - \lambda I)\mathbf{a}_j = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4.19)$$

*Demostración.* Para que  $\mathbf{y}_j$  sea solución del sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  se ha de cumplir

$$\mathbf{y}'_j = \lambda \mathbf{y}_j + e^{\lambda x}(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 x + \dots + (j-1)\mathbf{a}_{j-1} x^{j-2} + j\mathbf{a}_j x^{j-1}) = A\mathbf{y}_j,$$

o, equivalentemente,

$$(A - \lambda I)\mathbf{y}_j = e^{\lambda x}(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 x + \dots + (j-1)\mathbf{a}_{j-1} x^{j-2} + j\mathbf{a}_j x^{j-1}).$$

Dividiendo ambos miembros por  $e^{\lambda x}$  se llega a que  $\mathbf{y}_j$  es solución del sistema si, y sólo si,

$$(A - \lambda I)(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x + \dots + \mathbf{a}_{j-1} x^{j-1} + \mathbf{a}_j x^j) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 x + \dots + (j-1)\mathbf{a}_{j-1} x^{j-2} + j\mathbf{a}_j x^{j-1}.$$

Igualando coeficientes de cada potencia de  $x$  en los dos miembros de la relación anterior, se concluye que  $\mathbf{y}_j$  es solución si, y sólo si, se verifican las relaciones

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (A - \lambda I)\mathbf{a}_0 \\
\mathbf{a}_2 &= \frac{1}{2}(A - \lambda I)\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2!}(A - \lambda I)^2\mathbf{a}_0 \\
\mathbf{a}_3 &= \frac{1}{3}(A - \lambda I)\mathbf{a}_2 = \frac{1}{3!}(A - \lambda I)^3\mathbf{a}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_k &= \frac{1}{k}(A - \lambda I)\mathbf{a}_{k-1} = \frac{1}{k!}(A - \lambda I)^k\mathbf{a}_0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Y la última

$$(A - \lambda I)\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$$

En general

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{a}_{k-1} = k\mathbf{a}_k, & k = 1, 2, \dots, j; \\ (A - \lambda I)\mathbf{a}_j = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Para que  $e^{\lambda x}\mathbf{y}_j$  sea un polinomio de grado  $j$  el coeficiente  $\mathbf{a}_j$  ha de ser no nulo. Por lo tanto debe existir un vector  $\mathbf{a}_0 \in \ker(A - \lambda I)^{j+1} \setminus \ker(A - \lambda I)^j$ . En este caso el vector  $\mathbf{a}_0$  se define mediante las relaciones (Ecuación 4.20).

Resumiendo, la función (Ecuación 4.18) es una solución de la ecuación (Ecuación 4.6) si, y sólo si,

$$\mathbf{a}_0 \in \ker(A - \lambda I)^{j+1} \setminus \ker(A - \lambda I)^j \tag{4.22}$$

y

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{k!}(A - \lambda I)^k\mathbf{a}_0 \tag{4.23}$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, j$ .

Por último, queda pendiente definir  $j$ . Sea  $d > 1$  es tal que

$$\ker(A - \lambda I)^{d+1} = \ker(A - \lambda I)^d.$$

En este caso, existe un vector  $\mathbf{v}_0 \in \ker(A - \lambda I)^d \setminus \ker(A - \lambda I)^{d-1}$ . Definiendo recursivamente los vectores

$$\mathbf{v}_k = (A - \lambda I)^k\mathbf{v}_0$$

para  $k = 1, \dots, d$ , entonces

$$\begin{cases} (A - \lambda I)^{d-k}\mathbf{v}_k = (A - \lambda I)^d\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)^{d-k-1}\mathbf{v}_k = (A - \lambda I)^{d-1}\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

luego  $\mathbf{v}_k \in \ker(A - \lambda I)^{d-k} \setminus \ker(A - \lambda I)^{d-k-1}$ . Se tiene entonces que, para  $j = 0, \dots, d-1$ , las condiciones (Ecuación 4.22) y (Ecuación 4.23) se cumplen cuando  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_{d-j-1}$  y  $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{1!}\mathbf{v}_{d-j}$ , por lo tanto, las

funciones

$$\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda x} \left( \mathbf{v}_{d-j-1} + \mathbf{v}_{d-j} \frac{x}{1!} + \cdots + \mathbf{v}_{d-2} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + \mathbf{v}_{d-1} \frac{x^j}{j!} \right) \quad (4.24)$$

son soluciones de (Ecuación 4.6). □

Este teorema demuestra como encontrar las soluciones. Hay que coger un polinomio de grado  $d$  donde  $d$  es el primer valor tal que  $\ker(A - \lambda I)^{d+1} = \ker(A - \lambda I)^d$ . Además  $\mathbf{a}_d \in \ker(A - \lambda I)^{d+1} = \ker(A - \lambda I)^d$  y el resto de valores se definen recursivamente.

**Ejemplo 4.8.**

Resolver el sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución.* **Paso 1: Cálculo de autovalores**

El polinomio característico de  $A$  es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2)^5$$

Por tanto,  $\lambda = 0$  es autovalor y  $\lambda = 2$  es el único autovalor con multiplicidad algebraica mayor que uno  $m_a = 5$ .

**Paso 2: Cálculo de autovectores y multiplicidad geométrica**

Se resuelve  $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Escalonando

$$\text{rref}(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\dim(\ker(A - 2I)) = 2$ , luego la multiplicidad geométrica es  $m_g = 2$ .

Una base del espacio de autovectores es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

### Paso 3: Cálculo de vectores generalizados

Como  $m_a - m_g = 6 - 3 = 3$ , necesitamos encontrar 3 vectores generalizados adicionales.

Se calculan los núcleos sucesivos. Ya se ha calculado  $\dim(\ker(A - 2I)) = 2$ .

- $\dim(\ker(A - 2I)) = 2$
- $\dim(\ker(A - 2I)^2) = 4$
- $\dim(\ker(A - 2I)^3) = 5$

Por tanto,  $d = 3$  es el primer valor tal que  $\ker(A - 2I)^{d+1} = \ker(A - 2I)^d$ .

Esto implica que voy a tener dos soluciones de la forma Ecuación 4.24, un polinomio de grado uno y uno de grado dos.

### Paso 4: Construcción de las soluciones

Hay que hallar  $v_0 \in \ker(A - 2I)^3 \setminus \ker(A - 2I)^2$ .

Definimos  $v_1 = (A - \lambda I)v_0$  y  $v_2 = (A - \lambda I)v_1$ .

El siguiente vector será  $u_0 \in \ker(A - 2I)^2 \setminus \ker(A - 2I)$ . Y el último  $u_1 = (A - \lambda I)u_0$

Sea  $w$  el autovector del cero, la solución general del sistema es

$$\mathbf{y}(x) = c_1 w + c_2 u_0 e^{2x} + c_3 u_1 e^{2x} x + c_4 v_1 e^{2x} + c_5 v_2 e^{2x} x + c_6 v_3 e^{2x} \frac{x^2}{2}$$

donde  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbb{R}$  son constantes arbitrarias.

### Autovalores complejos

Ya se ha visto para ecuaciones lineales de orden superior que aunque el espacio de funciones sea complejo, se puede coger una base formada por funciones reales. Por lo tanto si  $y$  es solución, se puede coger como base  $(\operatorname{Re}(y), \operatorname{Im}(y))$

**Ejemplo 4.9.** Resolver el problema con valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

*Solución.* **Paso 1: Cálculo de autovalores**

Primero se obtienen los autovalores a partir del polinomio característico:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

Los autovalores son  $\lambda_1 = 2i$  y  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2i$ .

### Paso 2: Cálculo de autovectores

Para  $\lambda_1 = 2i$ , el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} (2 - 2i)k_1 + 8k_2 = 0 \\ -k_1 + (-2 - 2i)k_2 = 0 \end{cases}$$

Tomando  $k_2 = -1$ , se obtiene:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Paso 3: Construcción de soluciones reales

La manera más sencilla es coger la parte real y la imaginaria de una de las soluciones complejas: Definimos dos vectores, la parte real y la compleja del autovector:

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $\alpha = 0$  y  $\beta = 2$ , las funciones de cada vector son:

$$\operatorname{Re}(e^{(\alpha+i\beta)x}) = \operatorname{Re}(e^{\alpha}(\cos x + i \sin x)) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(e^{(\alpha+i\beta)x}) = \operatorname{Im}(e^{\alpha}(\cos x + i \sin x))$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1 \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2x - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2x \right] + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2x \right] \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 2x - 2 \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \cos 2x + 2 \sin 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.26}$$

### Paso 4: Aplicación de la condición inicial

La condición inicial  $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  produce el sistema algebraico:

$$2c_1 + 2c_2 = 2, \quad -c_1 = -1$$

cuya solución es  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 0$ . Así, la solución para el problema de valores iniciales es:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \cos 2x - 2 \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix}$$

**Exponencial de una matriz**

# Capítulo 5

## Planos de fases

El plano de fases permite explorar gráficamente el comportamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

El **plano de fases** muestra las trayectorias (órbitas) en el espacio  $(x, y)$ , donde cada punto representa un estado del sistema y las flechas indican la dirección del flujo.

### 5.1. Aplicaciones Prácticas

#### Física:

- Péndulo:  $(\theta, \dot{\theta}) \rightarrow$  posición y velocidad angular
- Masa-resorte:  $(x, \dot{x}) \rightarrow$  posición y velocidad
- Circuitos eléctricos:  $(I, V) \rightarrow$  corriente y voltaje

#### Biología:

- Presa-depredador (Lotka-Volterra):  $(x, y) \rightarrow$  poblaciones
- Epidemias (SIR):  $(S, I) \rightarrow$  susceptibles e infectados
- Reacciones químicas: concentraciones de reactivos

#### Economía:

- Modelos de crecimiento:  $(K, L) \rightarrow$  capital y trabajo
- Ciclos económicos:  $(Y, I) \rightarrow$  producción e inversión

#### Ingeniería:

- Sistemas de control:  $(x, \dot{x}) \rightarrow$  estado y derivada
- Robótica:  $(q, \dot{q}) \rightarrow$  posición y velocidad articular

## 5.2. Conceptos Clave

### i Terminología

**Plano de fases:** - Espacio  $(x, y)$  donde cada punto representa un estado del sistema - Las órbitas muestran la evolución temporal del sistema

**Campo vectorial:** - En cada punto  $(x, y)$ , el vector  $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$  indica la dirección del flujo

**Órbitas (trayectorias):** - Curvas solución en el plano de fases - Representan la evolución del sistema desde una condición inicial

**Puntos de equilibrio:** - Puntos donde  $\frac{dx}{dt} = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 0$  - El sistema permanece constante en estos puntos

**Tipos de equilibrio:** - **Nodo:** Todas las órbitas convergen/divergen radialmente - **Foco (espiral):** Órbitas espirales convergentes/divergentes - **Centro:** Órbitas cerradas (periódicas) - **Silla:** Equilibrio inestable con separatrices

## 5.3. Visualizador Interactivo

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## 5.4. Galería de Sistemas Clásicos

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

## 5.5. Método Numérico: Runge-Kutta 4

### 5.5.1. ¿Por qué RK4 en lugar de Euler?

Para integrar un sistema de EDOs y calcular órbitas precisas, necesitamos un método numérico robusto. He elegido **Runge-Kutta de 4º orden (RK4)** por las siguientes razones:

#### Comparación de Precisión

Método	Error Local	Error Global	Evaluaciones por paso
<b>Euler</b>	$O(h^2)$	$O(h)$	1
<b>RK2 (punto medio)</b>	$O(h^3)$	$O(h^2)$	2
<b>RK4</b>	$O(h^5)$	$O(h^4)$	4

**Interpretación:** - Con  $h = 0.1$ , Euler tiene error  $\sim 0.1$  - Con el mismo paso, RK4 tiene error  $\sim 0.0001$  (¡1000 veces menor!)

#### Ventajas de RK4

**1. Precisión superior:** - Para el mismo tamaño de paso  $h$ , RK4 es órdenes de magnitud más preciso - Permite usar pasos más grandes sin perder precisión - Reduce la acumulación de error en trayectorias largas

**2. Estabilidad:** - Menos sensible a la elección del paso  $h$  - Maneja mejor sistemas rígidos (stiff) - No diverge tan fácilmente como Euler

**3. Visualización de calidad:** - Las órbitas son suaves y precisas - Los ciclos límite se cierran correctamente  
- Los equilibrios se mantienen estables

**4. Eficiencia relativa:** - Aunque requiere 4 evaluaciones por paso vs 1 de Euler - Puedes usar pasos 5-10 veces mayores - Resultado: similar coste computacional pero mucho más preciso

### Inconvenientes de Euler

El **método de Euler** ( $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(y_n)$ ) tiene problemas serios:

#### Problema 1: Acumulación de error

Tras 1000 pasos:

- Euler: error acumulado  $1000 \times O(h^2) = O(h)$

- RK4: error acumulado  $1000 \times O(h^4) = O(h^4)$

**Problema 2: Inestabilidad numérica** - En sistemas oscilatorios (como el armónico), Euler introduce **espirales espurias** - Las órbitas cerradas se convierten en espirales divergentes - Ejemplo:  $dx/dt = -y, dy/dt = x$  con Euler genera espirales, no círculos

**Problema 3: Conservación de energía** - Sistemas conservativos (Hamiltoniano) pierden/ganan energía artificialmente - Las órbitas cambian de tamaño con el tiempo

### Fórmulas de RK4

Para un sistema  $\frac{dx}{dt} = f(x, y), \frac{dy}{dt} = g(x, y)$ :

**Paso 1:** Evaluar en el punto actual

$$k_1^x = f(x_n, y_n), \quad k_1^y = g(x_n, y_n)$$

**Paso 2:** Evaluar en el punto medio usando  $k_1$

$$k_2^x = f(x_n + \frac{h}{2}k_1^x, y_n + \frac{h}{2}k_1^y), \quad k_2^y = g(x_n + \frac{h}{2}k_1^x, y_n + \frac{h}{2}k_1^y)$$

**Paso 3:** Evaluar en el punto medio usando  $k_2$

$$k_3^x = f(x_n + \frac{h}{2}k_2^x, y_n + \frac{h}{2}k_2^y), \quad k_3^y = g(x_n + \frac{h}{2}k_2^x, y_n + \frac{h}{2}k_2^y)$$

**Paso 4:** Evaluar en el punto final usando  $k_3$

$$k_4^x = f(x_n + hk_3^x, y_n + hk_3^y), \quad k_4^y = g(x_n + hk_3^x, y_n + hk_3^y)$$

**Actualización:** Promedio ponderado

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1^y + 2k_2^y + 2k_3^y + k_4^y)$$

**Interpretación:** RK4 aproxima la solución usando el desarrollo de Taylor hasta orden 4, pero sin calcular derivadas explícitamente.

### Ejemplo Numérico

**Sistema:** Oscilador armónico  $\frac{dx}{dt} = -y$ ,  $\frac{dy}{dt} = x$

**Solución exacta:**  $x(t) = \cos(t)$ ,  $y(t) = \sin(t)$  (círculo unitario)

**Con Euler** ( $h = 0.1$ , **100 pasos** =  $t = 10$ ): - Error en posición:  $\sim 1.5$  (¡150% del radio!) - La órbita diverge como espiral

**Con RK4** ( $h = 0.1$ , **100 pasos** =  $t = 10$ ): - Error en posición:  $\sim 0.0001$  (0.01% del radio) - La órbita permanece circular

¿Cuándo usar otros métodos?

**Euler:** Solo para visualizaciones muy rápidas o didácticas (mostrar problemas de estabilidad)

**RK2 (Heun, punto medio):** Equilibrio entre precisión y velocidad para sistemas simples

**RK4:** Recomendado para la mayoría de aplicaciones (usado en este visualizador)

**RK45 (Dormand-Prince):** Paso adaptativo, óptimo para sistemas con diferentes escalas de tiempo

**Métodos implícitos (BDF):** Sistemas rígidos (stiff), ecuaciones químicas, circuitos

### 5.5.2. Código del método RK4

El método está implementado en la función `rk4_step`:

```
rk4_step = (x, y, t, dt, f, g) => {
  // k1: pendiente en el punto actual
  const k1_x = f(x, y, t);
  const k1_y = g(x, y, t);

  // k2: pendiente en el punto medio (usando k1)
  const k2_x = f(x + dt/2 * k1_x, y + dt/2 * k1_y, t + dt/2);
  const k2_y = g(x + dt/2 * k1_x, y + dt/2 * k1_y, t + dt/2);

  // k3: pendiente en el punto medio (usando k2)
  const k3_x = f(x + dt/2 * k2_x, y + dt/2 * k2_y, t + dt/2);
  const k3_y = g(x + dt/2 * k2_x, y + dt/2 * k2_y, t + dt/2);

  // k4: pendiente en el punto final (usando k3)
  const k4_x = f(x + dt * k3_x, y + dt * k3_y, t + dt);
```

```
const k4_y = g(x + dt * k3_x, y + dt * k3_y, t + dt);

// Promedio ponderado: más peso a k2 y k3 (puntos medios)
return {
  x: x + dt/6 * (k1_x + 2*k2_x + 2*k3_x + k4_x),
  y: y + dt/6 * (k1_y + 2*k2_y + 2*k3_y + k4_y)
};
}
```

## Capítulo 6

# Clasificación de Sistemas Lineales 2D

Para un sistema lineal **con coeficientes constantes**:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El comportamiento del sistema está **completamente determinado** por los **autovalores** de la matriz  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

donde  $\operatorname{tr}(A) = a + d$  (traza) y  $\det(A) = ad - bc$  (determinante).

### 6.1. Casos

La clasificación completa según los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ :

Caso	Tipo	Autovalores	Condición
<b>I</b>	Nodo (estable/inestable)	Reales distintos, mismo signo	$\Delta > 0, \det > 0$
<b>II</b>	Punto silla	Reales, signos opuestos	$\Delta > 0, \det < 0$
<b>III</b>	Nodo estrella	Real doble, mult. geom. 2	$A = \lambda I$
<b>IV</b>	Nodo impropio	Real doble, mult. geom. 1	$\Delta = 0, A \neq \lambda I$
<b>V</b>	Centro	Complejos puros	$\Delta < 0, \operatorname{tr}(A) = 0$
<b>VI</b>	Foco/Espiral	Complejos con parte real	$\Delta < 0, \operatorname{tr}(A) \neq 0$
<b>VII</b>	Degenerado	Al menos un autovalor cero	$\det = 0$

donde  $\Delta = \operatorname{tr}^2(A) - 4\det(A)$  es el discriminante.

### 6.2. Clasificación por Traza y Determinante

Para sistemas lineales 2D con matriz  $A$ , el tipo de equilibrio se determina completamente por:

- **Traza:**  $\tau = \operatorname{tr}(A) = a + d$
- **Determinante:**  $\Delta = \det(A) = ad - bc$

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

### 6.3. Visualización 3D: Sistemas Tridimensionales

Hasta ahora hemos trabajado con sistemas 2D (plano de fases), pero muchos sistemas dinámicos interesantes requieren **tres variables** para su descripción completa. En esta sección exploramos:

1. **Sistemas 3D autónomos:**  $(x, y, z)$  evolucionan según ecuaciones diferenciales
2. **Atractores extraños:** Comportamiento caótico en 3D
3. **Visualización interactiva 3D:** Rotación, zoom, y exploración

### 6.4. Del Plano al Espacio: ¿Por qué 3D?

#### **i** Dimensionalidad y Comportamiento

Sistemas 2D vs 3D:

Característica	Sistemas 2D	Sistemas 3D
<b>Caos</b>	Imposible (Teorema de Poincaré-Bendixson)	Posible (atractores extraños)
<b>Órbitas</b>	Curvas en el plano	Curvas en el espacio
<b>Equilibrios</b>	Nodo, foco, centro, silla	Más tipos (silla-foco, silla-nodo)
<b>Ciclos límite</b>	Curvas cerradas 2D	Toros y estructuras complejas
<b>Complejidad</b>	Limitada	Arbitrariamente compleja

#### ¿Por qué el caos requiere 3D?

En sistemas 2D autónomos, las órbitas **no pueden cruzarse** (por unicidad de soluciones). Esto impide el comportamiento caótico, que requiere “mezcla” de trayectorias. En 3D, las órbitas pueden “esquivarse” sin cruzarse, permitiendo:

- **Sensibilidad a condiciones iniciales:** Pequeños cambios  $\rightarrow$  grandes diferencias
- **Atractores fractales:** Estructuras con dimensión no entera
- **Mezcla topológica:** Estiramiento y plegado del espacio de fases

### 6.5. Ejemplos de Sistemas 3D

```

//| echo: false
//| label: visualizador-3d-component

// Cargar Plotly
Plotly = require("https://cdn.plot.ly/plotly-2.27.0.min.js")

// Función RK4 para sistemas 3D
rk4_step_3d = (x, y, z, t, dt, f, g, h) => {
  // k1

```

```

const k1_x = f(x, y, z, t);
const k1_y = g(x, y, z, t);
const k1_z = h(x, y, z, t);

// k2
const k2_x = f(x + dt/2 * k1_x, y + dt/2 * k1_y, z + dt/2 * k1_z, t + dt/2);
const k2_y = g(x + dt/2 * k1_x, y + dt/2 * k1_y, z + dt/2 * k1_z, t + dt/2);
const k2_z = h(x + dt/2 * k1_x, y + dt/2 * k1_y, z + dt/2 * k1_z, t + dt/2);

// k3
const k3_x = f(x + dt/2 * k2_x, y + dt/2 * k2_y, z + dt/2 * k2_z, t + dt/2);
const k3_y = g(x + dt/2 * k2_x, y + dt/2 * k2_y, z + dt/2 * k2_z, t + dt/2);
const k3_z = h(x + dt/2 * k2_x, y + dt/2 * k2_y, z + dt/2 * k2_z, t + dt/2);

// k4
const k4_x = f(x + dt * k3_x, y + dt * k3_y, z + dt * k3_z, t + dt);
const k4_y = g(x + dt * k3_x, y + dt * k3_y, z + dt * k3_z, t + dt);
const k4_z = h(x + dt * k3_x, y + dt * k3_y, z + dt * k3_z, t + dt);

return {
  x: x + dt/6 * (k1_x + 2*k2_x + 2*k3_x + k4_x),
  y: y + dt/6 * (k1_y + 2*k2_y + 2*k3_y + k4_y),
  z: z + dt/6 * (k1_z + 2*k2_z + 2*k3_z + k4_z)
};
}

// Calcular órbita 3D
calcular_orbita_3d = (f, g, h, x0, y0, z0, dt, tiempo_max) => {
  const xs = [], ys = [], zs = [];
  let x = x0, y = y0, z = z0;
  const pasos = Math.floor(tiempo_max / dt);

  for (let i = 0; i < pasos; i++) {
    xs.push(x);
    ys.push(y);
    zs.push(z);

    const paso = rk4_step_3d(x, y, z, i*dt, dt, f, g, h);
    x = paso.x;
    y = paso.y;
    z = paso.z;

    // Detener si diverge
    if (Math.abs(x) > 200 || Math.abs(y) > 200 || Math.abs(z) > 200) break;
  }
}

```

```

}

return {x: xs, y: ys, z: zs};
}

// Función principal del visualizador 3D usando Plotly
visualizar_sistema_3d = (config) => {
  const container = html`<div style="width: ${config.width || 900}px; height: ${config.height || 700}px;">

  // Parsear funciones del sistema
  let f, g, h;
  try {
    f = new Function('x', 'y', 'z', 't', `return ${config.dx_dt}`);
    g = new Function('x', 'y', 'z', 't', `return ${config.dy_dt}`);
    h = new Function('x', 'y', 'z', 't', `return ${config.dz_dt}`);
  } catch (e) {
    container.innerHTML = `<div style="color: red; padding: 20px; background: #fee; border-radius: 5px;">
      <strong>Error:</strong> ${e.message}
    </div>`;
    return container;
  }

  // Calcular órbitas
  const condiciones = config.condiciones_iniciales.split(';').map(s => {
    const [x, y, z] = s.trim().replace(/[\[\]]/g, '').split(',').map(Number);
    return {x, y, z};
  });

  const dt = config.dt || 0.01;
  const tiempo_max = config.tiempo_max || 50;

  // Colores vibrantes para cada órbita
  const colores = [
    '#e74c3c', '#3498db', '#2ecc71', '#f39c12',
    '#9b59b6', '#1abc9c', '#e67e22', '#34495e',
    '#c0392b', '#16a085'
  ];

  // Crear trazas de Plotly
  const trazas = condiciones.map((ic, idx) => {
    const orbita = calcular_orbita_3d(f, g, h, ic.x, ic.y, ic.z, dt, tiempo_max);

    return {
      type: 'scatter3d',

```

```

mode: 'lines',
x: orbita.x,
y: orbita.y,
z: orbita.z,
line: {
  color: colores[idx% colores.length],
  width: 4
},
name: `Órbita ${idx + 1}`,
hovertemplate: 'x: %{x:.2f}<br>y: %{y:.2f}<br>z: %{z:.2f}<extra></extra>'
});
});

// Añadir puntos iniciales
condiciones.forEach((ic, idx) => {
  trazes.push({
    type: 'scatter3d',
    mode: 'markers',
    x: [ic.x],
    y: [ic.y],
    z: [ic.z],
    marker: {
      size: 8,
      color: colores[idx% colores.length],
      symbol: 'circle',
      line: {
        color: 'white',
        width: 2
      }
    },
    name: `Inicio ${idx + 1}`,
    showlegend: false,
    hovertemplate: 'Inicio<br>x: %{x:.2f}<br>y: %{y:.2f}<br>z: %{z:.2f}<extra></extra>'
  });
});

// Layout de Plotly con estilo profesional
const layout = {
  title: {
    text: config.titulo || 'Sistema 3D',
    font: {size: 20, family: 'Arial, sans-serif', color: '#2c3e50'}
  },
  scene: {
    xaxis: {
      title: 'x',

```

```

    gridcolor: '#ecf0f1',
    showbackground: true,
    backgroundcolor: '#fafafa'
  },
  yaxis: {
    title: 'y',
    gridcolor: '#ecf0f1',
    showbackground: true,
    backgroundcolor: '#fafafa'
  },
  zaxis: {
    title: 'z',
    gridcolor: '#ecf0f1',
    showbackground: true,
    backgroundcolor: '#fafafa'
  },
  camera: {
    eye: {x: 1.8, y: -1.8, z: 0.8}
  },
  aspectmode: 'cube'
},
paper_bgcolor: 'white',
plot_bgcolor: 'white',
margin: {l: 0, r: 0, t: 40, b: 0},
showlegend: true,
legend: {
  x: 0.02,
  y: 0.98,
  bgcolor: 'rgba(255,255,255,0.8)',
  bordercolor: '#bdc3c7',
  borderwidth: 1
},
hovermode: 'closest'
};

// Config de Plotly
const plotConfig = {
  responsive: true,
  displayModeBar: true,
  displaylogo: false,
  modeBarButtonsToRemove: ['toImage'],
  modeBarButtonsToAdd: [{
    name: 'Resetear vista',
    icon: Plotly.Icons.home,
    click: function(gd) {

```

```

    Plotly.relayout(gd, {
      'scene.camera': {
        eye: {x: 1.8, y: -1.8, z: 0.8}
      }
    });
  }
}]
};

// Renderizar
Plotly.newPlot(container, traces, layout, plotConfig);

return container;
}

```

### 6.5.1. Atractor de Lorenz

#### Sistema de Lorenz (1963)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

**Parámetros clásicos:**  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$

**Características:** - **Primer ejemplo** de atractor extraño (caótico) - Modela convección atmosférica (Rayleigh-Bénard) - Dos “lóbulos” alrededor de equilibrios inestables - **Sensibilidad extrema:** cambios de  $10^{-5}$  en CI  $\rightarrow$  órbitas divergentes - Dimensión fractal:  $D \approx 2.06$

**Física:** -  $x$ : intensidad de circulación convectiva -  $y$ : diferencia de temperatura horizontal -  $z$ : desviación de temperatura vertical

**Interpretación de parámetros:** -  $\sigma$  (Prandtl): viscosidad/conductividad térmica -  $\rho$  (Rayleigh): diferencia de temperatura aplicada -  $\beta$ : relación de aspecto geométrica

```

//| echo: false
//| label: atractor-lorenz
viewof lorenz_params = Inputs.form({
  sigma: Inputs.range([5, 15], {value: 10, step: 0.5, label: " (Prandtl)"}),
  rho: Inputs.range([15, 35], {value: 28, step: 0.5, label: " (Rayleigh)"}),
  beta: Inputs.range([1, 4], {value: 8/3, step: 0.1, label: ""})
})

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `${lorenz_params.sigma} * (y - x)`,
  dy_dt: `x * (${lorenz_params.rho} - z) - y`,
  dz_dt: `x * y - ${lorenz_params.beta} * z`,

```

```

condiciones_iniciales: "[1,1,1]; [1.01,1,1]; [0,2,2]",
width: 900,
height: 700,
dt: 0.005,
tiempo_max: 50,
titulo: "Atractor de Lorenz"
})

```

### 6.5.2. Atractor de Rössler

Sistema de Rössler (1976)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

**Parámetros clásicos:**  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 5.7$

**Características:** - **Atractor caótico más simple** que Lorenz - Estructura de “banda enrollada” - Sección de Poincaré revela estructura fractal - Ruta al caos por **doblamiento de período**

**Ventaja sobre Lorenz:** Las ecuaciones son más simples, lo que facilita el análisis matemático.

```

//| echo: false
//| label: atractor-rossler
viewof rossler_params = Inputs.form({
  a: Inputs.range([0.1, 0.3], {value: 0.2, step: 0.01, label: "a"}),
  b: Inputs.range([0.1, 0.3], {value: 0.2, step: 0.01, label: "b"}),
  c: Inputs.range([4, 7], {value: 5.7, step: 0.1, label: "c"})
})

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `-y - z`,
  dy_dt: `x + ${rossler_params.a} * y`,
  dz_dt: `${rossler_params.b} + z * (x - ${rossler_params.c})`,
  condiciones_iniciales: "[1,1,1]; [2,0,0]; [-1,2,0]",
  width: 900,
  height: 700,
  dt: 0.01,
  tiempo_max: 200,
  titulo: "Atractor de Rössler"
})

```

### 6.5.3. Atractor de Aizawa

Sistema de Aizawa (1987)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (z - b)x - dy \\ \frac{dy}{dt} = dx + (z - b)y \\ \frac{dz}{dt} = c + az - \frac{z^3}{3} - (x^2 + y^2)(1 + ez) + fzx^3 \end{cases}$$

**Parámetros:**  $a = 0.95$ ,  $b = 0.7$ ,  $c = 0.6$ ,  $d = 3.5$ ,  $e = 0.25$ ,  $f = 0.1$

**Características:** - Atractor con **simetría toroidal** - Comportamiento más complejo que Lorenz - Hermosa estructura en forma de “flor” o “hélice” - Menos estudiado pero visualmente espectacular

```
//| echo: false
//| label: atractor-aizawa

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `(z - 0.7) * x - 3.5 * y`,
  dy_dt: `3.5 * x + (z - 0.7) * y`,
  dz_dt: `0.6 + 0.95 * z - (z*z*z)/3 - (x*x + y*y) * (1 + 0.25*z) + 0.1*z*x*x*x`,
  condiciones_iniciales: "[0.1,0,0]; [0.2,0.1,0]; [-0.1,0.1,0.5]",
  width: 900,
  height: 700,
  dt: 0.01,
  tiempo_max: 300,
  titulo: "Atractor de Aizawa"
})
```

#### 6.5.4. Atractor de Chen

**Sistema de Chen (1999)**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

**Parámetros:**  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$

**Características:** - Similar a Lorenz pero **no topológicamente equivalente** - Descubierta como parte de la familia de atractores Lorenz-like - Estructura de doble scroll más simétrica - Importante en criptografía y comunicaciones seguras

```
//| echo: false
//| label: atractor-chen

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `35 * (y - x)`,
  dy_dt: `(28 - 35) * x - x * z + 28 * y`,
  dz_dt: `x * y - 3 * z`,
  condiciones_iniciales: "[1,0,0]; [-2,0,1]; [0,1,2]",
})
```

```
width: 900,
height: 700,
dt: 0.002,
tiempo_max: 50,
titulo: "Atractor de Chen"
})
```

### 6.5.5. Sistema de Thomas

Sistema de Thomas (1999)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -bx + \sin(y) \\ \frac{dy}{dt} = -by + \sin(z) \\ \frac{dz}{dt} = -bz + \sin(x) \end{cases}$$

**Parámetro:**  $b = 0.208186$

**Características:** - Atractor con **simetría cíclica** (invariante bajo rotaciones de  $120^\circ$ ) - Forma de “pretzel” o nudo tridimensional - Sistema disipativo con comportamiento caótico - Usado en modelos de osciladores acoplados

```
///| echo: false
///| label: atractor-thomas

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `-0.208186 * x + Math.sin(y)`,
  dy_dt: `-0.208186 * y + Math.sin(z)`,
  dz_dt: `-0.208186 * z + Math.sin(x)`,
  condiciones_iniciales: "[1,1,1]; [2,0,0]; [0,2,0]",
  width: 900,
  height: 700,
  dt: 0.05,
  tiempo_max: 500,
  titulo: "Sistema de Thomas"
})
```

### 6.5.6. Atractor de Halvorsen

Sistema de Halvorsen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - 4y - 4z - y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -ay - 4z - 4x - z^2 \\ \frac{dz}{dt} = -az - 4x - 4y - x^2 \end{cases}$$

**Parámetro:**  $a = 1.4$

**Características:** - **Simetría perfecta** bajo permutaciones cíclicas de  $(x, y, z)$  - Atractor con cuatro “lóbulos” interconectados - Comportamiento caótico con alta complejidad estructural - Belleza geométrica notable

```

//| echo: false
//| label: atractor-halvorsen

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `-1.4 * x - 4 * y - 4 * z - y*y`,
  dy_dt: `-1.4 * y - 4 * z - 4 * x - z*z`,
  dz_dt: `-1.4 * z - 4 * x - 4 * y - x*x`,
  condiciones_iniciales: "[1,0,0]; [0,1,0]; [0,0,1]",
  width: 900,
  height: 700,
  dt: 0.005,
  tiempo_max: 100,
  titulo: "Atractor de Halvorsen"
})

```

### 6.5.7. Sistema de Sprott (Case A)

Sistema de Sprott A (1994)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + yz \\ \frac{dz}{dt} = 1 - y^2 \end{cases}$$

**Características:** - Uno de los **sistemas caóticos más simples** conocidos - Solo 5 términos (mínimo para caos en 3D con polinomios cuadráticos) - Parte de una colección de 19 sistemas simples caóticos (Sprott A-S) - Exponente de Lyapunov positivo a pesar de su simplicidad

**Relevancia:** Demuestra que el caos no requiere ecuaciones complicadas.

```

//| echo: false
//| label: atractor-sprott

visualizar_sistema_3d({
  dx_dt: `y`,
  dy_dt: `-x + y*z`,
  dz_dt: `1 - y*y`,
  condiciones_iniciales: "[0,1,0]; [0.5,0,0]; [0,0.5,0.5]",
  width: 900,
  height: 700,
  dt: 0.02,
  tiempo_max: 200,
  titulo: "Sistema de Sprott (Case A)"
})

```

## 6.6. Chaos en Sistemas 3D

### i Teoría de Sistemas Caóticos

#### 6.6.1. Características del Caos Determinista

##### 1. Sensibilidad a Condiciones Iniciales

Pequeñas diferencias iniciales  $\delta_0$  crecen exponencialmente:

$$\delta(t) \approx \delta_0 e^{\lambda t}$$

donde  $\lambda > 0$  es el **exponente de Lyapunov** máximo.

**Ejemplo Lorenz:**  $\delta_0 = 10^{-5} \rightarrow$  después de  $t \approx 10$  unidades,  $\delta(t) \sim 1$  (orden del atractor).

##### 2. Atractores Extraños

Son conjuntos invariantes con: - **Dimensión fractal:**  $D$  no entera (ej: Lorenz  $D \approx 2.06$ ) - **Estructura autosimilar:** Igual aspecto a diferentes escalas - **Medida no uniforme:** Algunas regiones más visitadas que otras

##### 3. Mezcla Topológica

El flujo “estira y pliega” el espacio de fases: - **Estiramiento:** Separación de trayectorias cercanas - **Plegado:** Mantiene el atractor acotado

#### 6.6.2. Herramientas de Análisis

**Exponentes de Lyapunov** -  $\lambda_1 > 0$ : Caos (divergencia exponencial) -  $\lambda_1 = 0$ : Movimiento cuasiperiódico -  $\lambda_1 < 0$ : Convergencia a equilibrio/ciclo

**Dimensión de Kaplan-Yorke**

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

donde  $j$  es el máximo índice tal que  $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$ .

**Sección de Poincaré** - Corte transversal del atractor - Revela estructura en 2D - Útil para detectar periodicidad

**Diagrama de Bifurcación** - Cómo cambia el atractor con un parámetro - Rutas al caos: doblamiento de período, intermitencia, crisis

## 6.7. Aplicaciones Prácticas

### 6.7.1. Meteorología

**Sistema de Lorenz**  $\rightarrow$  Convección atmosférica

- Predicción del tiempo limitada (horizonte  $\sim 10$  días)
- “Efecto mariposa”: pequeñas perturbaciones  $\rightarrow$  grandes cambios
- Modelos climáticos modernos: sistemas de dimensión  $\sim 10^7$

### 6.7.2. Circuitos Electrónicos

**Circuito de Chua** → Atractor caótico en hardware

- Resistor no lineal + inductores + capacitores
- Generación de señales caóticas
- Aplicación en comunicaciones seguras

### 6.7.3. Química

**Reacción de Belousov-Zhabotinsky**

- Oscilaciones químicas caóticas
- Ondas de concentración viajeras
- Modelo: sistema tipo Rössler

### 6.7.4. Biología

**Redes neuronales caóticas**

- Modelos de Hindmarsh-Rose (neuronas)
- Sincronización de osciladores
- Ritmos cardíacos irregulares (fibrilación)

### 6.7.5. Criptografía

**Generadores pseudoaleatorios**

- Sistemas tipo Lorenz/Chen como fuente de caos
- Cifrado basado en sincronización caótica
- Mayor seguridad que generadores lineales

## Capítulo 7

# Conservación del Volumen en Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos tienen la propiedad de **conservar el volumen** en el espacio de fases (Teorema de Liouville). Esto significa que si tomamos un conjunto de condiciones iniciales que ocupan cierta región, el flujo deformará esta región pero **su área permanecerá constante**.

Un sistema hamiltoniano tiene la forma:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

donde  $H(q, p)$  es la función hamiltoniana (energía total del sistema).

**Propiedad clave:** La divergencia del campo vectorial es cero:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0$$

Esta propiedad implica que el volumen (en 2D, el área) se conserva bajo el flujo.

**Nota:** Esta sección contiene funciones interactivas exclusivas [en la pagina web](#)

Parte I

Otros Recursos

## Capítulo 8

# Índices de Contenido Matemático

*x*

```
/// echo: false
dummy = 1
```

Este documento contiene índices organizados de todas las definiciones, teoremas, proposiciones y otros elementos matemáticos presentes en los apuntes.

---

### 8.1. Definicións

1. Definición 1.1 - **Forma estándar**
  2. Definición 1.2 - **Ecuación lineal**
  3. Definición 1.3 - **Forma estándar**
  4. Definición 1.4 - **Forma Normal**
  5. Definición 4.1 - **Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden**
  6. Definición 4.2 - **Solución de un sistema**
  7. Definición 4.3 - **Sistema lineal**
  8. Definición 4.4 - **Dependencia e independencia lineal**
  9. Definición 4.5 - **Wronskiano**
  10. Definición 4.6 - **Matriz fundamental de soluciones**
- 

### 8.2. Teoremas

1. Teorema 4.1 - **Principio de superposición**
2. Teorema 4.2 - **Teorema de Abel**
3. Teorema 4.3 - **Existencia de un sistema fundamental de soluciones (matriz identidad como base)**
4. Teorema 4.4 - **Estructura de la solución general**
5. Teorema 4.5 - **Principio de superposición para sistemas no homogéneos**
6. Teorema 4.6 - **Caracterización de matriz fundamental**
7. Teorema 4.7 - **Soluciones para autovalores con multiplicidad algebraica igual a la geométrica**
8. Teorema 4.8 - **Soluciones para autovalores con multiplicidad algebraica mayor que la**

geométrica

---

### 8.3. Proposiciones

1. Proposición 4.1 - Reducción de orden superior a sistema de primer orden
  2. Proposición 4.2 - Wronskiano y dependencia lineal
  3. Proposición 4.3 - Relación entre matrices fundamentales
  4. Proposición 4.4 - Solución exponencial y autovalores
- 

### 8.4. Corolarios

1. Corolario 4.1 - Criterio del Wronskiano para dependencia e independencia lineal
  2. Corolario 4.2 - Solución general del sistema no homogéneo
  3. Corolario 4.3 - Solución de problema de valor inicial
- 

### 8.5. Ejemplos

1. Ejemplo 1.1 - Ejemplo: Disparo Parabolico
  2. Ejemplo 1.2 - Ecuación lineal
  3. Ejemplo 1.3 - exm-orden
  4. Ejemplo 1.4 - exm-lineal
  5. Ejemplo 1.5 - exm-autonoma
  6. Ejemplo 1.6 - exm-forma-normal
  7. Ejemplo 4.1 - Ejemplo: comprobar si una función es solución
  8. Ejemplo 4.2 - Ejemplo: Ecuación de orden 3
  9. Ejemplo 4.3 - Ejemplo: sistema de orden 2
  10. Ejemplo 4.4 - Ejemplo: Sistema de dos ecuaciones
  11. Ejemplo 4.5 - Ejemplo: sistema de tres ecuaciones
  12. Ejemplo 4.6 - Ejemplo: autovalores distintos
  13. Ejemplo 4.7 - Ejemplo: multiplicidad geométrica igual a la algebraica
  14. Ejemplo 4.8 - Ejemplo: sistema 6x6
  15. Ejemplo 4.9 - Ejemplo: Autovalores complejos
- 

### 8.6. Ejercicios

1. Ejercicio 1.1 - exr-parabola
2. Ejercicio 12.1 - Solución de la ecuación homogénea
3. Ejercicio 12.2 - Neurona con corriente constante
4. Ejercicio 12.3 - Neurona con corriente variable

5. Ejercicio 12.4 - Neurona con corriente escalón
  6. Ejercicio 12.5 - Neurona con corriente impulsiva
- 

## 8.7. Soluciones

1. Solution 1.2 - Solución
  2. Solution 1.3 - Demostrar que la solución anterior es única salvo constante
  3. Solution 1.4 - Problemas de valor inicial (PVI)
  4. Solution 1.5 - Solución: Estudio paramétrico
  5. Solution 1.6 - Plano de fases
  6. Solution 1.7 - Solución: Equilibrio
  7. Solution 1.8 - Campo de direcciones paramétrico
  8. Solution 1.10 - Solución: Equilibrio y estabilidad
  9. Solution 1.10 - Solución: Método de Euler
- 

## 8.8. Visualizaciones

2. Sección 11.5 - Visualizador Interactivo de Modos de Vibración
-

## Capítulo 9

# Exámenes y guías docentes

### 9.1. Guías Docentes

Guía docente de la asignatura por curso y grado

Año	Grado	Documento
2025-26	Matemáticas y Física Aplicada	<a href="#">Guía docente (PDF)</a>
2024-25	Matemáticas Aplicadas	<a href="#">Guía docente (PDF)</a>

### 9.2. Exámenes

Año	Grado	Convocatoria	solved	Documento
2025-26	Mates/Física	Final (diciembre) resuelto		<a href="#">PDF</a>
2025-26	Mates/Física	Final (diciembre)		<a href="#">PDF</a>
2025-26	Mates/Física	Parcial (octubre)		<a href="#">PDF</a>
2024-25	Matemáticas	Final (junio)		<a href="#">PDF</a>
2024-25	Matemáticas	Final (enero)		<a href="#">PDF</a>
2024-25	Matemáticas	Parcial (noviembre)		<a href="#">PDF</a>
2024-25	Matemáticas	Parcial (noviembre)		<a href="#">PDF</a>

## Capítulo 10

# Herramientas de visualización

10.1. Visualizador Plano de fases 1D:

10.2. Plano 2D

10.3. Clasificador de Órbitas de Sistemas lineales

10.4. Potenciales y planos de fases

Parte II

**Actividades**

## Capítulo 11

# Vibración de un Tambor Circular

### **i** Contexto

Estudiamos las vibraciones de una membrana circular (tambor) cuando la solución no depende del ángulo (caso axisimétrico), reduciendo la ecuación de ondas 2D a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias con la ecuación de Bessel.

### 11.1. Ecuación de Ondas Bidimensional

La vibración de una membrana circular de radio  $a$  se describe mediante la **ecuación de ondas**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

donde  $u(x, y, t)$  es el desplazamiento vertical y  $c$  es la velocidad de propagación.

#### 11.1.1. Coordenadas Polares

Para una membrana circular, usamos coordenadas polares  $(r, \theta)$ :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

El laplaciano en coordenadas polares es:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Por tanto, la ecuación de ondas se escribe:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)}$$

#### 11.1.2. Caso Axisimétrico

Cuando la membrana vibra con **simetría radial** (independiente de  $\theta$ ), se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u(r, t)$$

La ecuación de ondas se reduce a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

con condiciones:

- **Borde fijo:**  $u(a, t) = 0$
- **Finitud en el centro:**  $u(0, t) < \infty$

## 11.2. Separación de Variables

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(r, t) = R(r)T(t)$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas:

$$R(r)T''(t) = c^2 \left( R''(r)T(t) + \frac{1}{r} R'(r)T(t) \right)$$

Dividiendo por  $R(r)T(t)$ :

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = -\lambda$$

donde  $\lambda$  es la **constante de separación** (autovalor).

### 11.2.1. Ecuación Temporal

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$$

**Solución** (para  $\lambda > 0$ ):

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = c\sqrt{\lambda}$$

Representa oscilaciones armónicas con frecuencia  $\omega$ .

### 11.2.2. Ecuación Radial (Ecuación de Bessel)

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda r^2 R(r) = 0$$

Definiendo  $k = \sqrt{\lambda}$  y haciendo el cambio  $\rho = kr$ :

$$\boxed{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \rho^2 R(\rho) = 0}$$

Esta es la **ecuación de Bessel de orden cero**  $J_0(\rho)$ .

**Solución general:**

$$R(\rho) = C_1 J_0(\rho) + C_2 Y_0(\rho)$$

donde:

- $J_0$  es la función de Bessel de primera especie
- $Y_0$  es la función de Bessel de segunda especie (singular en  $\rho = 0$ )

**Condición de finitud:** Como  $Y_0(0) \rightarrow -\infty$ , se requiere  $C_2 = 0$ :

$$R(r) = C_1 J_0(kr)$$


---

### 11.3. Condición de Frontera y Autovalores

La condición de borde fijo  $u(a, t) = 0$  implica:

$$R(a) = J_0(ka) = 0$$

**Autovalores:** Los valores  $k_n$  son las raíces de la función de Bessel:

$$J_0(k_n a) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Numéricamente, las primeras raíces de  $J_0(x)$  son:

$$x_1 \approx 2.4048$$

$$x_2 \approx 5.5201$$

$$x_3 \approx 8.6537$$

$$x_4 \approx 11.7915$$

⋮

Por tanto:

$$k_n = \frac{x_n}{a}, \quad \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{x_n}{a}\right)^2$$

#### 11.3.1. Frecuencias Naturales

Las frecuencias de vibración son:

$$\omega_n = ck_n = c \frac{x_n}{a}$$

**Interpretación:**

- El tambor vibra con frecuencias discretas (cuantizadas)
- Las frecuencias **no son múltiplos enteros** (a diferencia de una cuerda)
- Dependen inversamente del radio: tambores grandes suenan más grave

## 11.4. Modos Normales de Vibración

La solución general es una superposición de modos:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n r) [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)]$$

**Modo  $n$ -ésimo:**

$$u_n(r, t) = J_0(k_n r) \cos(\omega_n t)$$

### 11.4.1. Características de los Modos

Modo	$k_n a$	Nodos (círculos)	Frecuencia relativa
$n = 1$	2.40	0 (solo el borde)	$f_1$
$n = 2$	5.52	1 círculo interno	$2.30f_1$
$n = 3$	8.65	2 círculos internos	$3.60f_1$
$n = 4$	11.79	3 círculos internos	$4.90f_1$

**Nodos:** Círculos de radio  $r$  donde  $J_0(k_n r) = 0$ , que permanecen en reposo.

## 11.5. Visualizador Interactivo de Modos de Vibración





## 11.6. Figuras de Chladni: Visualizando las Vibraciones

En la segunda mitad de 1700, el físico alemán **Ernst Chladni** descubrió un método para visualizar los patrones de vibración: espolvorear arena fina sobre una placa o membrana vibrante. La arena se acumula en las **líneas nodales** (donde no hay movimiento), revelando los patrones geométricos de cada modo.

### 11.6.1. ¿Por qué se forman estos patrones?

- Las zonas que **vibran intensamente** agitan y expulsan la arena
- Los **nodos** (puntos en reposo) actúan como refugios donde la arena se deposita
- El resultado: patrones geométricos que corresponden exactamente a las soluciones matemáticas

### 11.6.2. Patrones de Chladni para el Caso Axisimétrico

Los modos que hemos estudiado ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) producen patrones de **círculos concéntricos**:

```
///| echo: false
///| label: chladni-axisimetrico

{
  const width = 730;
  const height = 250;
  const radius = 80;
  const spacing = 180;

  const svg = d3.create("svg")
    .attr("width", width)
    .attr("height", height)
    .attr("viewBox", [0, 0, width, height]);

  // Función auxiliar para encontrar ceros de Bessel
  const zerosJ0 = [0, 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915];

  for (let n = 1; n <= 4; n++) {
    const g = svg.append("g")
      .attr("transform", `translate(${spacing/2 + (n-1) * spacing}, ${height/2})`);

    // Círculo exterior
    g.append("circle")
      .attr("r", radius)
      .attr("fill", "none")
      .attr("stroke", "black")
      .attr("stroke-width", 2);
```

```

// Círculos nodales internos
for (let i = 1; i < n; i++) {
  const r_nodal = radius * zerosJ0[i] / zerosJ0[n];
  g.append("circle")
    .attr("r", r_nodal)
    .attr("fill", "none")
    .attr("stroke", "#e74c3c")
    .attr("stroke-width", 2.5)
    .attr("stroke-dasharray", "3,3");
}

// Etiqueta
g.append("text")
  .attr("y", radius + 25)
  .attr("text-anchor", "middle")
  .attr("font-size", "14px")
  .attr("font-weight", "bold")
  .text(`n = ${n}`);
}

return svg.node();
}

```

### 11.6.3. Videos: Figuras de Chladni en Acción

Observa estos experimentos reales donde se forman los patrones de Chladni:

**i** Chladni circular

<https://www.youtube.com/watch?v=CGiiSIMFFII>

**i** Chladni circular - nuevos modos

<https://www.youtube.com/watch?v=IRFysSAxWxI>

**i** Experimento con placa de Chladni

<https://www.youtube.com/watch?v=vvJAgUBF4w>

### 11.6.4. Aplicaciones modernas

Las figuras de Chladni tienen aplicaciones en muchas áreas:

- **Ingeniería acústica:** diseño de instrumentos musicales
- **Control de calidad:** detección de defectos en materiales
- **Nanotecnología:** manipulación de partículas microscópicas
- **Arte sonoro:** instalaciones que visualizan música en tiempo real

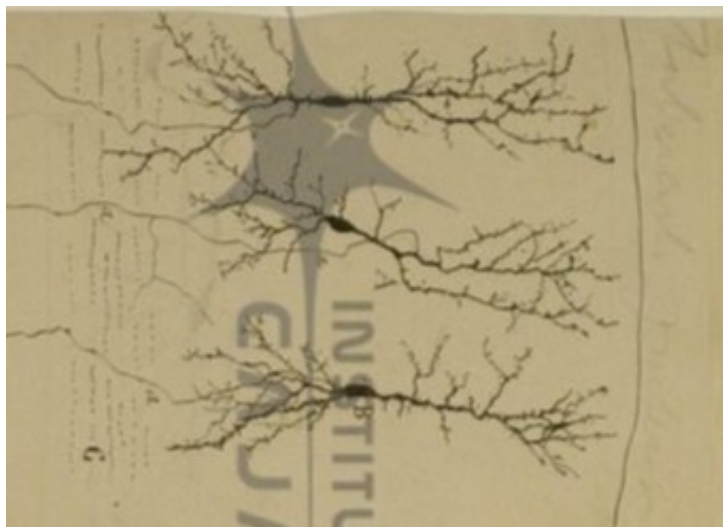
## Capítulo 12

# Modelo de Neurona Integrate-Fire-Leakage

### 12.1. Introducción

Las neuronas son células del sistema nervioso que transmiten información mediante impulsos eléctricos. Una neurona típica consta de tres partes principales: las **dendritas** (que reciben señales de otras neuronas), el **soma** o cuerpo celular (que integra las señales recibidas), y el **axón** (que transmite los impulsos eléctricos a otras neuronas).

El modelo **Integrate-and-Fire con fuga** (IFL) describe la dinámica del potencial de membrana de una neurona mediante un circuito eléctrico equivalente compuesto por un resistor  $R$  (fuga de corriente) y un condensador  $C$  (almacenamiento de carga).



La ecuación diferencial del potencial de membrana  $u(t)$  es:

$$\tau_m \frac{du}{dt} = -[u(t) - u_{\text{rest}}] + RI(t) \quad (12.1)$$

donde  $\tau_m = RC$  es la constante de tiempo de la membrana,  $u_{\text{rest}}$  es el potencial de reposo, e  $I(t)$  es la corriente de entrada. Cuando  $u(t)$  alcanza un umbral  $u_{\text{fire}}$ , la neurona “dispara” un potencial de acción y se reinicia.

## 12.2. Caso homogéneo: neurona sin estimulación externa

Consideremos primero el caso en que no hay corriente externa aplicada, es decir,  $I(t) = 0$ . La ecuación se reduce a:

$$\tau_m \frac{du}{dt} = -[u(t) - u_{\text{rest}}] \quad (12.2)$$

Esta es la ecuación que describe el comportamiento de “fuga” (**leaky**) de la neurona: sin estimulación externa, el potencial de membrana tiende a regresar exponencialmente hacia su valor de reposo  $u_{\text{rest}}$ .

**Ejercicio 12.1.** Resolver la ecuación Ecuación 12.2 mediante dos métodos diferentes:

1. **Método estándar**
2. **Transformada de Laplace** Considerar la condición inicial  $u(0) = u_0$ . Estudiar el comportamiento asintótico de la solución. ¿Se parece a algún modelo visto en clase? ¿Qué comportamiento tiene la neurona?

*Solución.* La ecuación es:

$$\tau_m \frac{du}{dt} = -(u - u_{\text{rest}})$$

Separando variables:

$$\frac{du}{u - u_{\text{rest}}} = -\frac{1}{\tau_m} dt$$

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{du}{u - u_{\text{rest}}} = -\int \frac{1}{\tau_m} dt$$

$$\ln |u - u_{\text{rest}}| = -\frac{t}{\tau_m} + C_1$$

$$u(t) - u_{\text{rest}} = Ce^{-t/\tau_m}$$

Imponiendo la condición inicial  $u(0) = u_0$ , se obtiene  $C = u_0 - u_{\text{rest}}$ . Por tanto:

$$\boxed{u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m}} \quad (12.3)$$

*Solución.* Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación. Sea  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ :

$$\tau_m [sU(s) - u_0] = -[U(s) - \frac{u_{\text{rest}}}{s}]$$

utilizando que  $\mathcal{L}\{u_{\text{rest}}\} = \frac{u_{\text{rest}}}{s}$  para una constante.

Despejando  $U(s)$ :

$$\tau_m s U(s) + U(s) = \tau_m u_0 + \frac{u_{\text{rest}}}{s}$$

$$U(s)(\tau_m s + 1) = \tau_m u_0 + \frac{u_{\text{rest}}}{s}$$

$$U(s) = \frac{\tau_m u_0}{\tau_m s + 1} + \frac{u_{\text{rest}}}{s(\tau_m s + 1)}$$

Para el primer término, se reescribe:

$$\frac{\tau_m u_0}{\tau_m s + 1} = \frac{u_0}{s + 1/\tau_m}$$

cuya transformada inversa es  $u_0 e^{-t/\tau_m}$ .

Para el segundo término, se aplica la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{u_{\text{rest}}}{s(\tau_m s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau_m s + 1}$$

Multiplicando por  $s(\tau_m s + 1)$ :

$$u_{\text{rest}} = A(\tau_m s + 1) + Bs$$

- Si  $s = 0$  entonces  $u_{\text{rest}} = A$
- Si  $s = -1/\tau_m$  entonces  $u_{\text{rest}} = -B/\tau_m \Rightarrow B = -u_{\text{rest}}\tau_m$

Por tanto:

$$\frac{u_{\text{rest}}}{s(\tau_m s + 1)} = \frac{u_{\text{rest}}}{s} - \frac{u_{\text{rest}}}{s + 1/\tau_m}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_{\text{rest}}}{s(\tau_m s + 1)} \right\} = u_{\text{rest}} - u_{\text{rest}} e^{-t/\tau_m}$$

Combinando ambos términos:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau_m} + u_{\text{rest}}(1 - e^{-t/\tau_m})$$

$$\boxed{u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m}}$$

que coincide con la solución obtenida por el método estándar Ecuación 12.3.

**Interpretación física:** La solución Ecuación 12.3 muestra que si la neurona parte de un potencial inicial  $u_0 \neq u_{\text{rest}}$ , el potencial de membrana decae exponencialmente hacia el valor de reposo  $u_{\text{rest}}$  con una

constante de tiempo  $\tau_m = RC$ . Este es el efecto de **leakage** (fuga) que da nombre al modelo.

### 12.3. Caso no homogéneo: corriente constante

Consideremos ahora el caso en que se aplica una corriente externa constante  $I(t) = I_0$ . La ecuación Ecuación 12.1 se convierte en:

$$\tau_m \frac{du}{dt} = -[u(t) - u_{\text{rest}}] + RI_0 \quad (12.4)$$

Esta ecuación describe cómo responde la neurona a una estimulación eléctrica constante, que es un caso fundamental en neurofisiología.

**Ejercicio 12.2.** Resolver la ecuación Ecuación 12.4 mediante dos métodos:

1. **Método estandar**
2. **Transformada de Laplace**

Considerar la condición inicial  $u(0) = u_0$ . Estudiar el comportamiento asintótico cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Solución.* **Paso 1: Solución homogénea**

La solución de la ecuación homogénea asociada ya fue obtenida en Ecuación 12.3:

$$u_h(t) = Ce^{-t/\tau_m}$$

**Paso 2: Solución particular por coeficientes indeterminados**

Se busca una solución particular de la forma  $u_p(t) = K$  (constante), ya que el término no homogéneo es constante.

Sustituyendo en la ecuación Ecuación 12.4:

$$\tau_m \cdot 0 = -[K - u_{\text{rest}}] + RI_0$$

$$0 = -K + u_{\text{rest}} + RI_0$$

$$K = u_{\text{rest}} + RI_0$$

Por tanto, la solución particular es:

$$u_p(t) = u_{\text{rest}} + RI_0$$

**Nota:** esto es equivalente a buscar un equilibrio.

**Paso 3: Solución general**

La solución general es la suma de la solución homogénea y particular:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Ce^{-t/\tau_m} + u_{\text{rest}} + RI_0$$

**Paso 4: Aplicar la condición inicial**

Imponiendo  $u(0) = u_0$ :

$$u_0 = C + u_{\text{rest}} + RI_0$$

$$C = u_0 - u_{\text{rest}} - RI_0$$

Por tanto, la solución completa es:

$$\boxed{u(t) = u_{\text{rest}} + RI_0 + (u_0 - u_{\text{rest}} - RI_0)e^{-t/\tau_m}} \quad (12.5)$$

*Solución.* Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación Ecuación 12.4. Sea  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ :

$$\tau_m[sU(s) - u_0] = -[U(s) - \frac{u_{\text{rest}}}{s}] + \frac{RI_0}{s}$$

utilizando que  $\mathcal{L}\{I_0\} = \frac{I_0}{s}$  para una constante.

Despejando  $U(s)$ :

$$\tau_m sU(s) - \tau_m u_0 = -U(s) + \frac{u_{\text{rest}}}{s} + \frac{RI_0}{s}$$

$$\tau_m sU(s) + U(s) = \tau_m u_0 + \frac{u_{\text{rest}} + RI_0}{s}$$

$$U(s)(\tau_m s + 1) = \tau_m u_0 + \frac{u_{\text{rest}} + RI_0}{s}$$

$$U(s) = \frac{\tau_m u_0}{\tau_m s + 1} + \frac{u_{\text{rest}}}{s(\tau_m s + 1)} + \frac{RI_0}{s(\tau_m s + 1)}$$

**Transformada del primer término:**

Este término ya fue calculado en el caso homogéneo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tau_m u_0}{\tau_m s + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0}{s + 1/\tau_m} \right\} = u_0 e^{-t/\tau_m}$$

**Transformada del segundo término:**

Este término también aparece en el caso homogéneo, por lo que su transformada inversa es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_{\text{rest}}}{s(\tau_m s + 1)} \right\} = u_{\text{rest}} (1 - e^{-t/\tau_m})$$

**Transformada del tercer término:**

Observando que la descomposición en fracciones parciales de  $\frac{1}{s(\tau_m s + 1)}$  es independiente del numerador constante, se puede factorizar:

$$\frac{RI_0}{s(\tau_m s + 1)} = RI_0 \cdot \frac{1}{s(\tau_m s + 1)}$$

Aplicando el mismo resultado:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{RI_0}{s(\tau_m s + 1)} \right\} = RI_0(1 - e^{-t/\tau_m})$$

**Solución final:**

Combinando los tres términos:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau_m} + u_{\text{rest}}(1 - e^{-t/\tau_m}) + RI_0(1 - e^{-t/\tau_m})$$

Factorizando:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau_m} + (u_{\text{rest}} + RI_0)(1 - e^{-t/\tau_m})$$

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau_m} + (u_{\text{rest}} + RI_0) - (u_{\text{rest}} + RI_0)e^{-t/\tau_m}$$

$$\boxed{u(t) = u_{\text{rest}} + RI_0 + (u_0 - u_{\text{rest}} - RI_0)e^{-t/\tau_m}}$$

que coincide con la solución obtenida por el método estándar Ecuación 12.5.

**Interpretación física:**

La solución Ecuación 12.5 muestra que:

1. **Estado transitorio:** El término exponencial  $(u_0 - u_{\text{rest}} - RI_0)e^{-t/\tau_m}$  decae con constante de tiempo  $\tau_m$ .
2. **Estado estacionario:** Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la solución converge a:

$$u_{\infty} = u_{\text{rest}} + RI_0$$

Este nuevo equilibrio es el potencial de reposo desplazado por el término  $RI_0$  debido a la corriente constante aplicada.

3. **Condición de disparo:** Si la corriente  $I_0$  es suficientemente grande tal que  $u_{\infty} = u_{\text{rest}} + RI_0 \geq u_{\text{fire}}$  (umbral de disparo), la neurona alcanzará el umbral y disparará un potencial de acción.

## 12.4. Caso general: corriente variable $I(t)$

Consideremos ahora el caso más general donde la corriente de entrada es una función arbitraria del tiempo  $I(t)$ . La ecuación del potencial es:

$$\tau_m \frac{du}{dt} + u(t) = u_{\text{rest}} + RI(t) \quad (12.6)$$

Esta ecuación diferencial lineal de primer orden describe la respuesta de la neurona a cualquier patrón temporal de estimulación.

**Ejercicio 12.3.** Resolver la ecuación Ecuación 12.6 mediante dos métodos:

1. **Método estandar**
2. **Transformada de Laplace**

Considerar la condición inicial  $u(0) = u_0$  y una corriente genérica  $I(t)$ .

*Solución.* Se observa que esta ecuación es otro problema no homogéneo con la **misma parte homogénea** que los casos anteriores. Por tanto, la solución homogénea es:

$$u_h(t) = Ce^{-t/\tau_m}$$

Del caso anterior con corriente constante Ecuación 12.5, se tiene que la solución completa tiene la forma:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m} + u_p(t)$$

donde  $u_p(t)$  es la **solución particular** que depende de la corriente aplicada.

### Solución particular por variación de constantes

Para encontrar  $u_p(t)$  cuando  $I(t)$  es variable, se aplica el método de variación de constantes a la ecuación no homogénea:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau_m}u(t) = \frac{R}{\tau_m}I(t)$$

Se propone una solución de la forma:

$$u_p(t) = C(t)e^{-t/\tau_m}$$

donde  $C(t)$  es una función a determinar. Calculando la derivada:

$$\frac{du_p}{dt} = C'(t)e^{-t/\tau_m} - \frac{1}{\tau_m}C(t)e^{-t/\tau_m}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$C'(t)e^{-t/\tau_m} - \frac{1}{\tau_m}C(t)e^{-t/\tau_m} + \frac{1}{\tau_m}C(t)e^{-t/\tau_m} = \frac{R}{\tau_m}I(t)$$

Simplificando:

$$C'(t)e^{-t/\tau_m} = \frac{R}{\tau_m} I(t)$$

$$C'(t) = \frac{R}{\tau_m} I(t)e^{t/\tau_m}$$

Integrando desde 0 hasta  $t$ :

$$C(t) = \frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s)e^{s/\tau_m} ds$$

Por tanto, la solución particular es:

$$u_p(t) = C(t)e^{-t/\tau_m} = \frac{R}{\tau_m} e^{-t/\tau_m} \int_0^t I(s)e^{s/\tau_m} ds$$

que también se puede escribir como:

$$u_p(t) = \frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s)e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

**Solución general:**

Combinando la solución homogénea con condición inicial y la solución particular:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m} + \frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s)e^{-(t-s)/\tau_m} ds \quad (12.7)$$

donde el último término es una **convolución** que representa la respuesta de la neurona a toda la historia de estimulación.

*Solución.* Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación Ecuación 12.6. Reescribiendo primero en forma estándar:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau_m} u(t) = \frac{1}{\tau_m} u_{\text{rest}} + \frac{R}{\tau_m} I(t)$$

Sea  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  y  $J(s) = \mathcal{L}\{I(t)\}$ . Aplicando la transformada:

$$sU(s) - u_0 + \frac{1}{\tau_m} U(s) = \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s} + \frac{R}{\tau_m} J(s)$$

**Paso 1: Despejar  $U(s)$**

$$U(s) \left( s + \frac{1}{\tau_m} \right) = u_0 + \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s} + \frac{R}{\tau_m} J(s)$$

$$U(s) = \frac{u_0}{s + 1/\tau_m} + \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} + \frac{R}{\tau_m(s + 1/\tau_m)} \mathcal{J}(s)$$

**Paso 2: Transformada inversa del primer término**

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0}{s + 1/\tau_m} \right\} = u_0 e^{-t/\tau_m}$$

**Paso 3: Transformada inversa del segundo término**

Ya calculado anteriormente en el caso homogéneo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} \right\} = u_{\text{rest}} (1 - e^{-t/\tau_m})$$

**Paso 4: Transformada inversa del tercer término**

Este término requiere el teorema de la convolución. Se sabe que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/\tau_m} \right\} = e^{-t/\tau_m}$$

Por el teorema de la convolución:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/\tau_m} \mathcal{J}(s) \right\} = e^{-t/\tau_m} * I(t) = \int_0^t e^{-(t-s)/\tau_m} I(s) ds$$

donde \* denota la operación de convolución.

**Solución final:**

Combinando todos los términos:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau_m} + u_{\text{rest}} (1 - e^{-t/\tau_m}) + \frac{R}{\tau_m} \int_0^t e^{-(t-s)/\tau_m} I(s) ds$$

Simplificando:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + \frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s) e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

que coincide exactamente con la solución obtenida por variación de constantes Ecuación 12.7.

**Interpretación física:**

La solución Ecuación 12.7 revela tres componentes fundamentales:

1. **Estado de reposo:**  $u_{\text{rest}}$  es el potencial base al que tiende la membrana.
2. **Término transitorio:**  $(u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m}$  representa el decaimiento exponencial desde la condición inicial hacia el reposo.

3. **Respuesta a la estimulación:** El término integral

$$\frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s) e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

es una **convolución** que representa cómo la neurona “integra” toda la historia de estimulación  $I(s)$  desde  $s = 0$  hasta el tiempo actual  $t$ . Cada estímulo pasado contribuye con un peso exponencialmente decreciente  $e^{-(t-s)/\tau_m}$ , lo que refleja la naturaleza de “memoria corta” de la neurona determinada por  $\tau_m$ .

Este resultado generaliza los casos anteriores:

- Si  $I(t) = 0$ , recuperamos la ecuación Ecuación 12.3
- Si  $I(t) = I_0$  (constante), recuperamos la ecuación Ecuación 12.5

## 12.5. Caso particular: corriente tipo escalón (Heaviside)

Consideremos ahora el caso en que la corriente aplicada es una función escalón de Heaviside con un salto en  $t = t_0$ :

$$I(t) = I_0 \mathcal{H}(t - t_0)$$

donde  $\mathcal{H}(t - t_0)$  es la función escalón unitario que vale 0 para  $t < t_0$  y 1 para  $t \geq t_0$ . Este caso modela una neurona que está en reposo hasta que en  $t = t_0$  se le aplica súbitamente una corriente constante.

**Ejercicio 12.4.** Resolver la ecuación Ecuación 12.6 con  $I(t) = I_0 \mathcal{H}(t - t_0)$  y condición inicial  $u(0) = u_0$ . Usar la transformada de Laplace.

*Solución.* Se parte de la solución general Ecuación 12.7:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + \frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s) e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

Sustituyendo  $I(t) = I_0 \mathcal{H}(t - t_0)$ :

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + \frac{RI_0}{\tau_m} \int_0^t \mathcal{H}(s - t_0) e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

### Análisis de la integral según el valor de $t$

La función escalón  $\mathcal{H}(s - t_0)$  divide el dominio de integración en dos regiones:

- Para  $s < t_0$ :  $\mathcal{H}(s - t_0) = 0$
- Para  $s \geq t_0$ :  $\mathcal{H}(s - t_0) = 1$

**Caso 1:**  $t < t_0$  (antes del salto)

Si  $t < t_0$ , entonces para todo  $s \in [0, t]$  se tiene que  $s < t_0$ , por lo que  $\mathcal{H}(s - t_0) = 0$  en todo el intervalo de integración. Por tanto:

$$\int_0^t \mathcal{H}(s - t_0) e^{-(t-s)/\tau_m} ds = 0$$

y la solución es:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m}$$

El potencial evoluciona según la dinámica homogénea desde la condición inicial.

**Caso 2:**  $t \geq t_0$  (después del salto)

Si  $t \geq t_0$ , la función escalón vale  $\mathcal{H}(s - t_0) = 1$  solo cuando  $s \geq t_0$ . Por tanto, la integral se reduce a:

$$\int_0^t \mathcal{H}(s - t_0) e^{-(t-s)/\tau_m} ds = \int_{t_0}^t e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

Para calcular esta integral, se reescribe el integrando:

$$\int_{t_0}^t e^{-(t-s)/\tau_m} ds = e^{-t/\tau_m} \int_{t_0}^t e^{s/\tau_m} ds$$

Resolviendo la integral:

$$\int_{t_0}^t e^{s/\tau_m} ds = [\tau_m e^{s/\tau_m}]_{t_0}^t = \tau_m e^{t/\tau_m} - \tau_m e^{t_0/\tau_m} = \tau_m e^{t_0/\tau_m} (e^{(t-t_0)/\tau_m} - 1)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{-(t-s)/\tau_m} ds &= e^{-t/\tau_m} \cdot \tau_m e^{t_0/\tau_m} (e^{(t-t_0)/\tau_m} - 1) \\ &= \tau_m e^{-(t-t_0)/\tau_m} (e^{(t-t_0)/\tau_m} - 1) = \tau_m (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m}) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + \frac{RI_0}{\tau_m} \cdot \tau_m (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m})$$

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + RI_0 (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m})$$

Reagrupando los términos exponenciales:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + RI_0 - RI_0 e^{-(t-t_0)/\tau_m}$$

$$u(t) = u_{\text{rest}} + RI_0 + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} - RI_0 e^{-(t-t_0)/\tau_m}$$

**Verificación de continuidad en  $t = t_0$** 

Es importante verificar que la solución es continua en el punto de discontinuidad de la corriente:

- Límite por la izquierda:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t_0/\tau_m}$$

- Límite por la derecha:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} u(t) &= u_{\text{rest}} + RI_0 + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t_0/\tau_m} - RI_0e^0 \\ &= u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t_0/\tau_m} \end{aligned}$$

Por tanto,  $u(t)$  es continua en  $t = t_0$ , aunque la corriente  $I(t)$  presente una discontinuidad de salto. Esto es físicamente correcto: el potencial de membrana no puede cambiar instantáneamente porque el condensador debe cargarse de forma continua.

**Solución completa:**

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m} & \text{si } t < t_0 \\ u_{\text{rest}} + RI_0 + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m} - RI_0e^{-(t-t_0)/\tau_m} & \text{si } t \geq t_0 \end{cases} \quad (12.8)$$

Esto se puede escribir de forma compacta como:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m} + RI_0 [1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m}] \mathcal{H}(t - t_0)$$

*Solución.* Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación Ecuación 12.6. Reescribiendo en forma estándar:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau_m}u(t) = \frac{1}{\tau_m}u_{\text{rest}} + \frac{R}{\tau_m}I(t)$$

Con  $I(t) = I_0\mathcal{H}(t - t_0)$ , se tiene que  $\mathcal{L}\{I(t)\} = \frac{I_0e^{-st_0}}{s}$ .

Sea  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Aplicando la transformada:

$$sU(s) - u_0 + \frac{1}{\tau_m}U(s) = \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s} + \frac{R}{\tau_m} \cdot \frac{I_0e^{-st_0}}{s}$$

**Paso 1: Despejar  $U(s)$** 

$$U(s) \left( s + \frac{1}{\tau_m} \right) = u_0 + \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s} + \frac{RI_0e^{-st_0}}{\tau_m s}$$

$$U(s) = \frac{u_0}{s + 1/\tau_m} + \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} + \frac{RI_0e^{-st_0}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} \quad (12.9)$$

**Paso 2: Transformada inversa del primer y segundo término**

Estos términos ya fueron calculados en casos anteriores:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0}{s + 1/\tau_m} \right\} = u_0 e^{-t/\tau_m}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} \right\} = u_{\text{rest}} (1 - e^{-t/\tau_m})$$

### Paso 3: Transformada inversa del tercer término

Para el término con el escalón:

$$\frac{RI_0 e^{-st_0}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} = RI_0 e^{-st_0} \cdot \frac{1}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)}$$

Utilizando la descomposición en fracciones parciales ya conocida:

$$\frac{1}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau_m}$$

Por tanto:

$$\frac{RI_0 e^{-st_0}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} = RI_0 e^{-st_0} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau_m} \right]$$

Aplicando el teorema del desplazamiento (segundo teorema de traslación): si  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ , entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_0} F(s)\} = f(t - t_0) \mathcal{H}(t - t_0)$$

Como  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau_m} \right\} = 1 - e^{-t/\tau_m}$ , se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ RI_0 e^{-st_0} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau_m} \right] \right\} = RI_0 [1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m}] \mathcal{H}(t - t_0)$$

### Paso 4: Solución completa

Combinando todos los términos:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau_m} + u_{\text{rest}} (1 - e^{-t/\tau_m}) + RI_0 [1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m}] \mathcal{H}(t - t_0)$$

Simplificando:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + RI_0 [1 - e^{-(t-t_0)/\tau_m}] \mathcal{H}(t - t_0)$$

que coincide exactamente con la solución obtenida por convolución.

Expandiendo la función escalón para  $t \geq t_0$ :

$$u(t) = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}}) e^{-t/\tau_m} + RI_0 - RI_0 e^{-(t-t_0)/\tau_m}$$

$$u(t) = u_{\text{rest}} + RI_0 + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m} - RI_0e^{-(t-t_0)/\tau_m}$$

**Interpretación física:**

La solución Ecuación 12.8 muestra que:

1. **Antes de  $t_0$ :** El potencial evoluciona según la ecuación homogénea, decayendo desde  $u_0$  hacia  $u_{\text{rest}}$ .
2. **En  $t = t_0$ :** Se produce un cambio instantáneo en la corriente aplicada, pero el potencial permanece continuo.
3. **Después de  $t_0$ :** El potencial evoluciona hacia el nuevo equilibrio  $u_{\text{rest}} + RI_0$ . La solución contiene dos exponenciales: una heredada de la condición inicial  $(u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m}$  y otra debida al salto en la corriente  $-RI_0e^{-(t-t_0)/\tau_m}$ .

**12.6. Caso particular: corriente tipo impulso (Delta de Dirac)**

Consideremos ahora el caso en que la corriente aplicada es un impulso instantáneo en  $t = t_0$ , modelado por la delta de Dirac:

$$I(t) = Q_0\delta(t - t_0)$$

donde  $Q_0$  representa la carga total inyectada instantáneamente. Este caso modela un estímulo sináptico puntual, como el que ocurre cuando llega un potencial de acción de una neurona presináptica.

**Ejercicio 12.5.** Resolver la ecuación Ecuación 12.6 con  $I(t) = Q_0\delta(t - t_0)$  y condición inicial  $u(0) = u_{\text{rest}}$  (la neurona parte del reposo). Usar la solución general por convolución.

*Solución.* Se parte de la solución general Ecuación 12.7 con  $u_0 = u_{\text{rest}}$ :

$$u(t) = u_{\text{rest}} + \frac{R}{\tau_m} \int_0^t I(s)e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

Sustituyendo  $I(t) = Q_0\delta(t - t_0)$ :

$$u(t) = u_{\text{rest}} + \frac{RQ_0}{\tau_m} \int_0^t \delta(s - t_0)e^{-(t-s)/\tau_m} ds$$

Utilizando la propiedad de muestreo de la delta de Dirac:

$$\int_0^t f(s)\delta(s - t_0)ds = \begin{cases} f(t_0) & \text{si } 0 < t_0 < t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto:

**Caso 1:**  $t < t_0$  (antes del impulso)

$$u(t) = u_{\text{rest}}$$

**Caso 2:**  $t \geq t_0$  (después del impulso)

$$u(t) = u_{\text{rest}} + \frac{RQ_0}{\tau_m} e^{-(t-t_0)/\tau_m}$$

**Solución completa:**

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{rest}} & \text{si } t < t_0 \\ u_{\text{rest}} + \frac{RQ_0}{\tau_m} e^{-(t-t_0)/\tau_m} & \text{si } t \geq t_0 \end{cases} \quad (12.10)$$

Esto se puede escribir de forma compacta como:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + \frac{RQ_0}{\tau_m} e^{-(t-t_0)/\tau_m} \mathcal{H}(t-t_0)$$

*Solución.* Aplicando la transformada de Laplace, la ecuación con la transformada de Laplace es Ecuación 12.9 on  $I(t) = Q_0\delta(t-t_0)$  y  $u_0 = u_{\text{rest}}$ :

$$U(s) = \frac{u_{\text{rest}}}{s + 1/\tau_m} + \frac{u_{\text{rest}}}{\tau_m s(s + 1/\tau_m)} + \frac{R}{\tau_m(s + 1/\tau_m)} \mathcal{L}\{Q_0\delta(t-t_0)\}$$

La transformada de la delta desplazada es:  $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$ .

Por tanto, el término no homogéneo debido al impulso es:

$$\frac{RQ_0 e^{-st_0}}{\tau_m(s + 1/\tau_m)}$$

Aplicando el teorema del desplazamiento con  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/\tau_m}\right\} = e^{-t/\tau_m}$ :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{RQ_0 e^{-st_0}}{\tau_m(s + 1/\tau_m)}\right\} = \frac{RQ_0}{\tau_m} e^{-(t-t_0)/\tau_m} \mathcal{H}(t-t_0)$$

Combinando con los términos homogéneos (que se cancelan al ser  $u_0 = u_{\text{rest}}$ ):

$$u(t) = u_{\text{rest}} + \frac{RQ_0}{\tau_m} e^{-(t-t_0)/\tau_m} \mathcal{H}(t-t_0)$$

que coincide con la solución por convolución.

**Interpretación física:**

La solución Ecuación 12.10 muestra que:

1. **Antes de  $t_0$ :** La neurona permanece en reposo.
2. **En  $t = t_0$ :** Se produce un salto instantáneo en el potencial de membrana. El potencial salta a:

$$u(t_0^+) = u_{\text{rest}} + \frac{RQ_0}{\tau_m}$$

Esta es la **respuesta al impulso** (impulse response) del sistema neuronal.

3. **Después de  $t_0$** : El potencial decae exponencialmente hacia el reposo con constante de tiempo  $\tau_m$ . Este decaimiento representa el efecto de leakage que disipa la carga inyectada.
4. **Potencial postsináptico**: La solución Ecuación 12.10 es análoga a un **potencial postsináptico excitatorio** (EPSP) en neurociencia, donde una neurona presináptica provoca un aumento breve y transitorio del potencial de la neurona postsináptica.
5. **Superposición**: Si la neurona recibe múltiples impulsos en diferentes tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , por linealidad del sistema, la respuesta total es la suma de las respuestas individuales:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + \frac{R}{\tau_m} \sum_{i=1}^n Q_i e^{-(t-t_i)/\tau_m} \mathcal{H}(t-t_i)$$

Este principio es fundamental en la integración sináptica neuronal.

## 12.7. Mecanismo de disparo (Firing threshold)

Hasta ahora hemos analizado la dinámica del potencial de membrana bajo diferentes tipos de corriente de entrada. Sin embargo, el modelo completo **Integrate-and-Fire** incluye un mecanismo adicional crucial: el **umbral de disparo**  $u_{\text{fire}}$ .

### 12.7.1. Condición de disparo

El modelo IFL completo se define mediante:

$$\begin{cases} \tau_m \frac{du}{dt} = -[u(t) - u_{\text{rest}}] + RI(t) & \text{si } u(t) < u_{\text{fire}} \\ u(t) \rightarrow u_{\text{reset}} & \text{si } u(t) \geq u_{\text{fire}} \end{cases}$$

donde:

- $u_{\text{fire}}$ : **umbral de disparo** (firing threshold), típicamente  $u_{\text{fire}} \approx -55$  mV
- $u_{\text{reset}}$ : **potencial de reinicio** tras el disparo, usualmente  $u_{\text{reset}} = u_{\text{rest}}$

**Mecanismo de funcionamiento:**

1. La neurona integra la corriente de entrada según la ecuación diferencial mientras  $u(t) < u_{\text{fire}}$
2. Cuando  $u(t)$  alcanza el umbral  $u_{\text{fire}}$ , se registra un **potencial de acción** (spike)
3. El potencial se reinicia instantáneamente a  $u_{\text{reset}}$
4. La integración continúa desde este nuevo valor

### 12.7.2. Análisis de disparo para corriente constante

Consideremos el caso de corriente constante  $I(t) = I_0$  con  $u(0) = u_{\text{rest}}$ . La solución es:

$$u(t) = u_{\text{rest}} + RI_0(1 - e^{-t/\tau_m})$$

**Casos según la intensidad de la corriente:**

1. **Corriente subumbral** ( $RI_0 < u_{\text{fire}} - u_{\text{rest}}$ ):

El equilibrio  $u_{\infty} = u_{\text{rest}} + RI_0$  está por debajo del umbral. La neurona nunca dispara, permaneciendo en un estado estacionario subumbral.

2. **Corriente supraumbral** ( $RI_0 > u_{\text{fire}} - u_{\text{rest}}$ ):

El equilibrio está por encima del umbral. La neurona alcanza  $u_{\text{fire}}$  en un **tiempo de disparo** finito  $t_{\text{spike}}$  que se calcula resolviendo:

$$u_{\text{fire}} = u_{\text{rest}} + RI_0(1 - e^{-t_{\text{spike}}/\tau_m})$$

Despejando:

$$e^{-t_{\text{spike}}/\tau_m} = 1 - \frac{u_{\text{fire}} - u_{\text{rest}}}{RI_0}$$

$$t_{\text{spike}} = \tau_m \ln \left( \frac{RI_0}{RI_0 - (u_{\text{fire}} - u_{\text{rest}})} \right)$$

Tras el disparo, la neurona se reinicia y el proceso se repite, generando una **secuencia periódica de spikes** con frecuencia de disparo:

$$f = \frac{1}{t_{\text{spike}} + \tau_{\text{refr}}}$$

donde  $\tau_{\text{refr}}$  es un posible período refractario.

3. **Corriente crítica** ( $RI_0 = u_{\text{fire}} - u_{\text{rest}}$ ):

El equilibrio coincide exactamente con el umbral. La neurona alcanza  $u_{\text{fire}}$  asintóticamente ( $t_{\text{spike}} \rightarrow \infty$ ), comportándose como un **bifurcación silla-nodo**.

### 12.7.3. Simulación interactiva

A continuación se presenta una simulación interactiva del modelo IFL donde puedes explorar:

- **Corriente de entrada:** Constante, escalón, impulsos, o personalizada
- **Parámetros:**  $\tau_m$ ,  $u_{\text{rest}}$ ,  $u_{\text{fire}}$ ,  $R$
- **Visualización:** Potencial de membrana, corriente de entrada, y tiempos de disparo

```
//| echo: false

viewof params = Inputs.form({
  tau_m: Inputs.range([5, 50], {value: 20, step: 1, label: " (ms)"}),
  R: Inputs.range([1, 20], {value: 10, step: 0.5, label: "R (MΩ)"}),
  u_rest: Inputs.range([-80, -60], {value: -70, step: 1, label: "u_rest (mV)"}),
  u_fire: Inputs.range([-60, -40], {value: -55, step: 1, label: "u_fire (mV)"}),
  u_reset: Inputs.range([-80, -60], {value: -70, step: 1, label: "u_reset (mV)"}),
  u_0: Inputs.range([-80, -40], {value: -70, step: 1, label: "u (mV) - Potencial inicial"}),
```

```

I_type: Inputs.select(["Constante", "Escalón", "Pulsos periódicos", "Rampa", "Sigmoide", "Decaimier
    {value: "Constante", label: "Tipo de corriente"}),
I_amp: Inputs.range([0, 5], {value: 2, step: 0.1, label: "Amplitud I (nA)"},
sigma: Inputs.range([0, 1.5], {value: 0.6, step: 0.05, label: " - Volatilidad del ruido"}),
t_max: Inputs.range([50, 500], {value: 200, step: 10, label: "Tiempo simulación (ms)"})
})

// Función para calcular la corriente según el tipo
function getCurrentValue(t, params) {
  switch(params.I_type) {
    case "Constante":
      return params.I_amp;
    case "Escalón":
      return t > 50 ? params.I_amp : 0;
    case "Pulsos periódicos":
      return (Math.floor(t / 40) % 2 === 0) ? params.I_amp : 0;
    case "Rampa":
      return Math.min(params.I_amp, params.I_amp * t / 100);
    case "Sigmoide":
      // Transición suave centrada en t_max/2 con pendiente controlada
      return params.I_amp / (1 + Math.exp(-(t - params.t_max/2) / 10));
    case "Decaimiento exponencial":
      // Pulso exponencial que inicia en t=50ms con tau_syn=20ms
      const t0 = 50;
      const tau_syn = 20;
      return t > t0 ? params.I_amp * Math.exp(-(t - t0) / tau_syn) : 0;
    case "Ruido":
      // Corriente base más ruido gaussiano (Box-Muller transform)
      const I_base = params.I_amp * 0.9;
      const noise_intensity = params.I_amp * params.sigma;
      const u1 = Math.random();
      const u2 = Math.random();
      const noise = Math.sqrt(-2 * Math.log(u1)) * Math.cos(2 * Math.PI * u2);
      return Math.max(0, I_base + noise_intensity * noise);
    default:
      return 0;
  }
}

// Simulación del modelo IFL
function simulateIFL(params) {
  const dt = 0.1; // paso de tiempo (ms)
  const n_steps = Math.floor(params.t_max / dt);

```

```

let t = [];
let u = [];
let I = [];
let spikes = [];

let u_current = params.u_0;

for (let i = 0; i < n_steps; i++) {
  const t_current = i * dt;
  const I_current = getCurrentValue(t_current, params);

  // Ecuación diferencial: du/dt = (-u + u_rest + R*I) / tau_m
  const dudt = -(u_current - params.u_rest) + params.R * I_current) / params.tau_m;
  u_current += dudt * dt;

  // Verificar umbral
  if (u_current >= params.u_fire) {
    spikes.push(t_current);
    u_current = params.u_reset;
  }

  t.push(t_current);
  u.push(u_current);
  I.push(I_current);
}

return {t, u, I, spikes};
}

simulation = simulateIFL(params)

// Gráfica del potencial de membrana
Plot.plot({
  width: 900,
  height: 400,
  marginLeft: 60,
  marginBottom: 50,
  x: {
    label: "Tiempo (ms)",
    grid: true
  },
  y: {
    label: "Potencial de membrana (mV)",
    domain: [params.u_rest - 10, params.u_fire + 10],
  }
});

```

```
    grid: true
  },
  marks: [
    // Línea del umbral
    Plot.ruleY([params.u_fire], {stroke: "red", strokeDasharray: "5,5", strokeWidth: 2}),
    Plot.text(`u_fire = ${params.u_fire} mV`, {
      x: params.t_max * 0.9,
      y: params.u_fire + 2,
      fill: "red",
      fontSize: 12
    }),

    // Línea del potencial de reposo
    Plot.ruleY([params.u_rest], {stroke: "gray", strokeDasharray: "3,3"}),
    Plot.text(`u_rest = ${params.u_rest} mV`, {
      x: params.t_max * 0.9,
      y: params.u_rest - 2,
      fill: "gray",
      fontSize: 12
    }),

    // Línea del potencial de reset
    Plot.ruleY([params.u_reset], {stroke: "blue", strokeDasharray: "2,2", strokeWidth: 1}),
    Plot.text(`u_reset = ${params.u_reset} mV`, {
      x: params.t_max * 0.1,
      y: params.u_reset - 2,
      fill: "blue",
      fontSize: 12
    }),

    // Potencial de membrana
    Plot.line(simulation.t.map((t, i) => ({t, u: simulation.u[i]})), {
      x: "t",
      y: "u",
      stroke: "steelblue",
      strokeWidth: 2
    }),

    // Marcas de spikes
    Plot.dot(simulation.spikes.map(t => ({t, u: params.u_fire})), {
      x: "t",
      y: "u",
      fill: "red",
      r: 5
    })
  ]
}
```

```

]
})

// Gráfica de la corriente de entrada
Plot.plot({
  width: 900,
  height: 150,
  marginLeft: 60,
  marginBottom: 50,
  x: {
    label: "Tiempo (ms)",
    grid: true
  },
  y: {
    label: "Corriente I(t) (nA)",
    grid: true
  },
  marks: [
    Plot.line(simulation.t.map((t, i) => ({t, I: simulation.I[i]})), {
      x: "t",
      y: "I",
      stroke: "orange",
      strokeWidth: 2
    }),
    Plot.ruleY([0], {stroke: "black", strokeWidth: 0.5})
  ]
})

// Información sobre los spikes
html`<div style="margin-top: 20px; padding: 15px; background-color: #f0f0f0; border-radius: 8px;">
  <strong>Estadísticas de disparo:</strong><br>
  Número de spikes: <strong>${simulation.spikes.length}</strong><br>
  ${simulation.spikes.length > 1 ? `
    Frecuencia promedio: <strong>${(simulation.spikes.length / (params.t_max / 1000)).toFixed(2)} Hz</strong>
    Intervalo inter-spike promedio: <strong>${((simulation.spikes[simulation.spikes.length-1] - simul
  ` : simulation.spikes.length === 1 ? `
    Tiempo del primer spike: <strong>${simulation.spikes[0].toFixed(2)} ms</strong>
  ` : `
    <em>No se alcanzó el umbral (corriente subumbral)</em>
  `
</div>`

```

#### 12.7.4. Observaciones sobre la simulación

Experimentos sugeridos:

1. **Corriente subumbral:** Reduce la amplitud de corriente por debajo del valor crítico y observa cómo el potencial se estabiliza sin disparar.
2. **Relación corriente-frecuencia:** Con corriente constante, aumenta gradualmente  $I_0$  y observa cómo aumenta la frecuencia de disparo (curva F-I).
3. **Respuesta a pulsos:** Selecciona “Pulsos periódicos” para observar la integración temporal de la neurona.
4. **Efecto de  $\tau_m$ :** Modifica la constante de tiempo y observa cómo afecta a la velocidad de respuesta y la integración de señales.
5. **Umbral y excitabilidad:** Varía  $u_{\text{fire}}$  para ver cómo cambia la excitabilidad neuronal.

**Conexión con la teoría:**

- Cuando la corriente es constante y supraumbral, el tiempo entre spikes coincide con  $t_{\text{spike}}$  calculado analíticamente.
- Los spikes aparecen cuando la solución analítica  $u(t)$  cruza el umbral  $u_{\text{fire}}$ .
- El modelo demuestra **integración temporal**: estímulos débiles prolongados pueden sumarse hasta alcanzar el umbral.
- La forma exponencial de  $u(t)$  explica por qué corrientes más intensas producen frecuencias de disparo más altas.

## Capítulo 13

# Corriente con ruido: una introducción a procesos estocásticos

Al seleccionar el tipo de corriente “**Ruido**” en la simulación, se observa un fenómeno interesante: a pesar de que la corriente fluctúa de forma aparentemente caótica, el potencial de membrana  $u(t)$  muestra un comportamiento relativamente suave y predecible. Esta propiedad tiene una explicación matemática profunda que conecta con el **cálculo estocástico**.

El **cálculo estocástico** es la rama de las matemáticas que estudia procesos que evolucionan en el tiempo de forma aleatoria, extendiendo las herramientas del cálculo diferencial e integral al contexto probabilístico. A diferencia del cálculo ordinario donde las trayectorias son deterministas, aquí cada “realización” del proceso es diferente, pero todas siguen leyes estadísticas comunes.

### ¿Por qué el ruido no desestabiliza completamente la neurona?

La respuesta reside en el **efecto integrador** del condensador en el modelo IFL. Veamos por qué:

#### 1. El modelo con ruido como ecuación diferencial estocástica

Cuando la corriente  $I(t)$  tiene una componente ruidosa (ruido blanco gaussiano), el modelo IFL se convierte en una **ecuación diferencial estocástica (SDE)**:

$$du = -\frac{1}{\tau_m}(u - u_{\text{rest}})dt + \frac{R\sigma}{\tau_m}dW_t$$

donde  $W_t$  es un **proceso de Wiener** (movimiento browniano) y  $\sigma$  controla la intensidad del ruido.

#### 2. Propiedad clave: la media no se ve afectada

Aunque cada trayectoria individual  $u(t)$  es aleatoria, se puede demostrar (usando herramientas de cálculo estocástico avanzado) que la **trayectoria esperada** es exactamente:

$$\mathbb{E}[u(t)] = u_{\text{rest}} + (u_0 - u_{\text{rest}})e^{-t/\tau_m}$$

¡La misma solución que el caso determinista sin ruido! El ruido añade **variabilidad**, pero no cambia el comportamiento **promedio**.

#### 3. $\tau_m$ como filtro pasa-bajos

La constante de tiempo  $\tau_m$  determina cuánto “suaviza” la neurona el ruido:

- **Ruido rápido** (fluctuaciones con periodo  $T \ll \tau_m$ ): El condensador las filtra eficazmente,

integrándolas (promediándolas) antes de que afecten significativamente al potencial.

- **Ruido lento** (fluctuaciones con periodo  $T \approx \tau_m$ ): Estas componentes sí afectan al potencial, produciendo las oscilaciones visibles en la simulación.

Este es el principio fundamental de **integración**: el condensador “acumula” la información de entrada a lo largo del tiempo, suavizando fluctuaciones rápidas.

#### 4. Consecuencias para el disparo

El ruido puede tener efectos importantes:

- **Disparo estocástico**: Incluso con corriente media subumbral ( $E[RI(t)] < u_{\text{fire}} - u_{\text{rest}}$ ), las fluctuaciones pueden ocasionalmente llevar  $u(t)$  por encima del umbral, produciendo spikes irregulares.
- **Regularización de frecuencia**: Con corriente supraumbral, el ruido introduce variabilidad en los tiempos de disparo (coeficiente de variación  $CV > 0$ ), similar a lo observado en neuronas reales.

#### Conexión con matemáticas avanzadas

El modelo IFL con ruido es un ejemplo del **proceso de Ornstein-Uhlenbeck**, uno de los procesos estocásticos más estudiados. Para este proceso se puede demostrar:

- Tiene una **distribución estacionaria gaussiana** con media  $u_{\text{rest}}$  y varianza que depende de  $\sigma^2$  y  $\tau_m$ .
- Es **ergódico**: el promedio temporal de una trayectoria converge al promedio estadístico.
- La **autocorrelación** decae exponencialmente con constante  $\tau_m$ :  $\text{Corr}(u(t), u(t + \Delta t)) \propto e^{-\Delta t/\tau_m}$ .

Estas propiedades requieren herramientas de **cálculo estocástico** (lema de Itô, ecuaciones de Fokker-Planck) que van más allá del curso actual, pero ilustran cómo las ecuaciones diferenciales ordinarias se extienden de forma natural al contexto estocástico.

#### Observación práctica en la simulación

Al experimentar con “Ruido”, observa que:

- El potencial fluctúa alrededor de un valor medio predecible.
- Aumentar  $\tau_m$  (hacer el sistema más “lento”) reduce la amplitud de las fluctuaciones visibles.
- Los spikes ocurren de forma irregular, pero con una **frecuencia media** que depende de la intensidad del ruido y los parámetros del modelo.

Este comportamiento es fundamental en neurociencia computacional: las neuronas reales operan en un régimen ruidoso, y el modelo IFL captura cómo la integración temporal permite extraer señal del ruido.